CZERWIEC 2010

Prawidłowe odpowiedzi do zadań zamkniętych

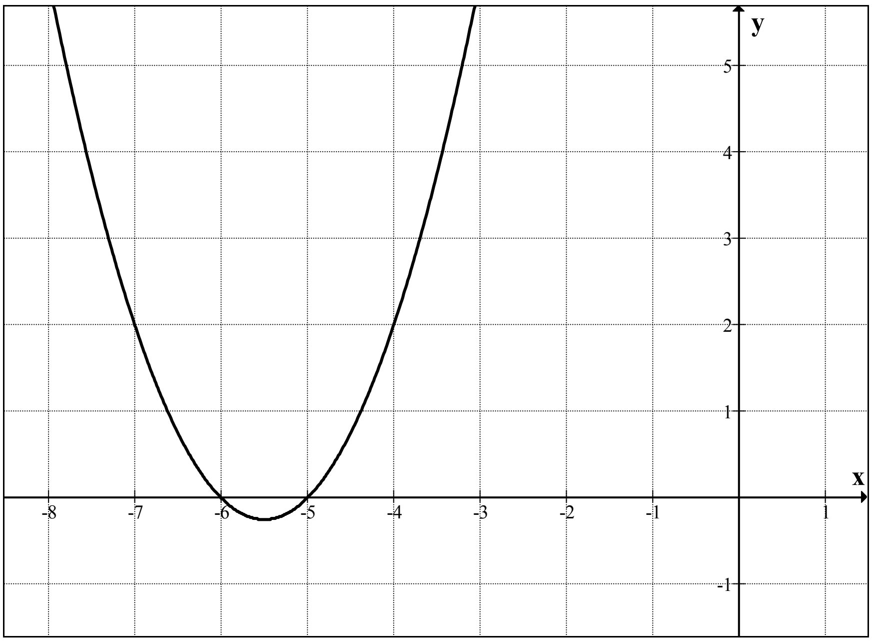
Nr Zadania	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
Odpowiedź	C	B	D	A	C	A	A	B	B	A	D	A	C	B	D	C	C	A	C	B	C	C	A	B	D

Schemat oceniania zadań otwartych

Zadanie 26. (*2 pkt*)
Rozwiąż nierówność $x^2+11x+30\le 0$.

<u>**I sposób rozwiązania**</u> (obliczanie wyróżnika)

- rozwiązujemy nierówność $x^2+11x+30\le 0$
- obliczamy Δ: $\Delta=1$
- obliczamy: $x=-6$ lub $x=-5$
- rysujemy fragment wykresu funkcji $f(x)=x^2+11x+30$



- zapisujemy zbiór rozwiązań nierówności: $x\in\langle -6,-5\rangle$

<u>**Schemat oceniania I sposobu rozwiązania**</u>

Zdający otrzymuje .... 1 pkt
gdy:
- obliczy prawidłowo pierwiastki trójmianu kwadratowego $x=-6$ lub $x=-5$ i na tym poprzestanie lub błędnie zapisze zbiór rozwiązań nierówności

albo
- przekształci trójmian $x^2+11x+30$ do postaci $(x+6)(x+5)$ i na tym poprzestanie lub błędnie rozwiąże nierówność przy poprawnie obliczonych pierwiastkach

albo

- popełni błąd rachunkowy przy obliczaniu pierwiastków trójmianu kwadratowego i konsekwentnie do popełnionego błędu rozwiąże nierówność, np. $x = \frac{-11+3}{2} = -4$, $x \in \langle -6, -4 \rangle$

albo

- rozwiąże nierówność i odpowiedź poda w postaci $x \geq -6$, $x \leq -5$ (brak spójnika oraz interpretacji geometrycznej)

albo

- rozwiąże nierówność i odpowiedź poda w postaci $x \in \langle -6, \infty)$, $x \in (-\infty, -5\rangle$ (brak spójnika oraz interpretacji geometrycznej)

albo

- sporządzi ilustrację geometryczną (oś liczbowa, wykres) **i nie zapisze zbioru rozwiązań nierówności**

Zdający otrzymuje .... 2 pkt
gdy:

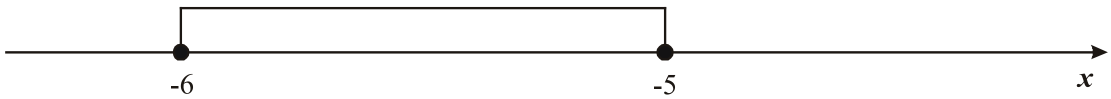
- poda zbiór rozwiązań nierówności: $x \in \langle -6, -5 \rangle$

albo

- sporządzi ilustrację geometryczną (oś liczbowa, wykres) i zapisze zbiór rozwiązań nierówności w postaci $x \geq -6$, $x \leq -5$

albo

- poda zbiór rozwiązań nierówności w postaci graficznej z poprawnie zaznaczonymi końcami przedziałów.



<u>II sposób rozwiązania</u> (rozkład trójmianu kwadratowego na czynniki)

- zapisujemy nierówność $x^2 + 11x + 30 \leq 0$ w postaci. np. $(x+6)(x+5) \leq 0$
- obliczamy: $x_1 = -6$, $x_2 = -5$
- na podstawie rozkładu na czynniki zapisujemy zbiór rozwiązań nierówności: $\langle -6, -5 \rangle$

<u>Schemat oceniania II sposobu rozwiązania</u>

Zdający otrzymuje .... 1 pkt
gdy:

- rozłoży trójmian kwadratowy na czynniki liniowe, np. $(x+6)\cdot(x+5)$ i na tym poprzestanie lub błędnie rozwiąże nierówność

albo

- rozłoży trójmian kwadratowy na czynniki liniowe z jednym błędem, np. $(x-6)\cdot(x+5) \leq 0$ i konsekwentnie rozwiąże nierówność

Zdający otrzymuje .... 2 pkt
gdy:

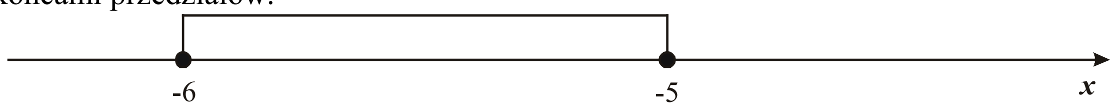
- poda zbiór rozwiązań nierówności : $\langle -6, -5 \rangle$ lub $x \in \langle -6, -5 \rangle$ lub $x \geq -6$ i $x \leq -5$

albo

- sporządzi ilustrację geometryczną (oś liczbowa, wykres) i zapisze zbiór rozwiązań nierówności w postaci $x \geq -6$, $x \leq -5$

albo

- poda zbiór rozwiązań nierówności w postaci graficznej z poprawnie zaznaczonymi końcami przedziałów.



<u>III sposób rozwiązania</u> (dopełnienie do kwadratu sumy)

- zapisujemy nierówność w postaci, np. $x^2 + 2 \cdot \frac{11}{2} x + \frac{121}{4} - \frac{121}{4} + 30 \leq 0$

$$\left(x + \frac{11}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \leq 0$$

$$(x+6) \cdot (x+5) \leq 0$$

- zapisujemy: $x = -6$, $x = -5$
- na podstawie rozkładu na czynniki zapisujemy zbiór rozwiązań nierówności: $\langle -6, -5 \rangle$

<u>Schemat oceniania III sposobu rozwiązania</u>

Zdający otrzymuje .... 1 pkt

gdy zapisze trójmian kwadratowy dopełniając do kwadratu sumy w postaci, np. $\left(x + \frac{11}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$

i na tym poprzestanie lub błędnie rozwiąże nierówność

Zdający otrzymuje .... 2 pkt

gdy:

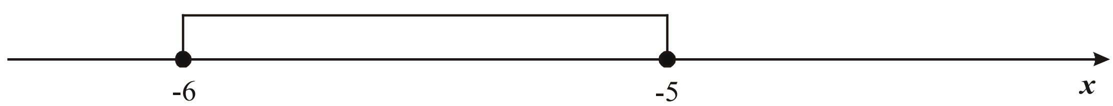
- poda zbiór rozwiązań nierówności : $\langle -6, -5 \rangle$ lub $x \in \langle -6, -5 \rangle$ lub $x \geq -6$ i $x \leq -5$

albo

- sporządzi ilustrację geometryczną (oś liczbowa, wykres) i zapisze zbiór rozwiązań nierówności w postaci $x \geq -6$, $x \leq -5$

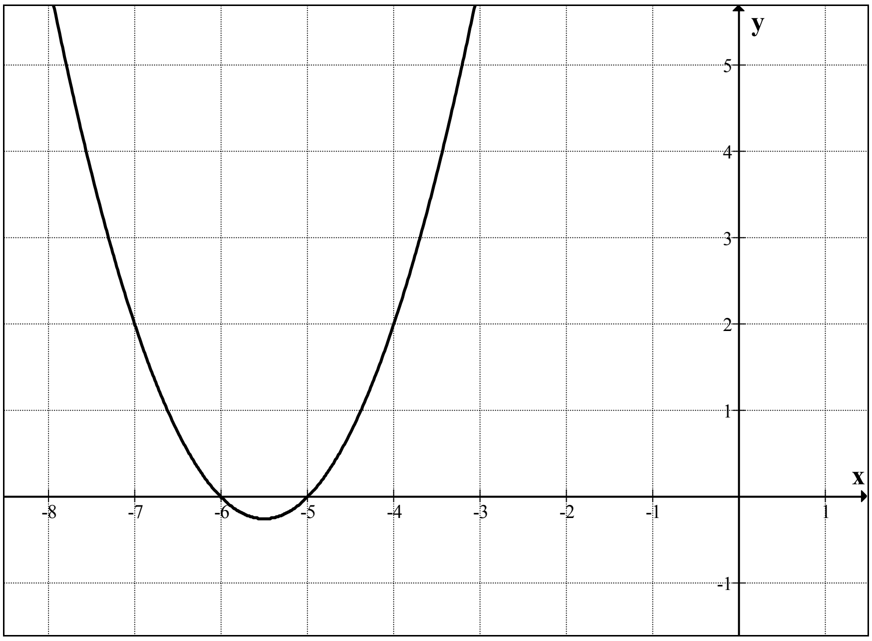
albo

- poda zbiór rozwiązań nierówności w postaci graficznej z poprawnie zaznaczonymi końcami przedziałów.



<u>IV sposób rozwiązania</u> (wzory Viète'a)

- zapisujemy $x_1 + x_2 = -11$ i $x_1 \cdot x_2 = 30$
- zapisujemy : $x = -6$, $x = -5$
- narysujemy fragment wykresu funkcji $f(x) = x^2 + 11x + 30$



- podajemy zbiór rozwiązań nierówności: $x \in \langle -6, -5 \rangle$

<u>Schemat oceniania IV sposobu rozwiązania</u>

Zdający otrzymuje .... 1 pkt

gdy:

- prawidłowo zapisze wzory Viète'a: $x_1 + x_2 = -11$ i $x_1 \cdot x_2 = 30$ i obliczy pierwiastki trójmianu kwadratowego: $x = -6$, $x = -5$ i na tym poprzestanie lub błędnie zapisze zbiór rozwiązań nierówności

albo

- błędnie zapisze wzory Viète'a: $x_1 + x_2 = 11$ i $x_1 \cdot x_2 = 30$ lub $x_1 + x_2 = -11$ i $x_1 \cdot x_2 = -30$ i konsekwentnie do tego rozwiąże nierówność

Zdający otrzymuje .... 2 pkt

gdy:

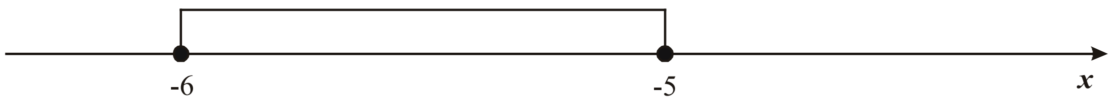
- zapisze zbiór rozwiązań nierówności : $\langle -6, -5 \rangle$ lub $x \in \langle -6, -5 \rangle$ lub $x \geq -6$ i $x \leq -5$

albo

- sporządzi ilustrację geometryczną (oś liczbowa, wykres) i zapisze zbiór rozwiązań nierówności w postaci $x \geq -6$, $x \leq -5$

albo

- poda zbiór rozwiązań nierówności w postaci graficznej z poprawnie zaznaczonymi końcami przedziałów.



<u>V sposób rozwiązania</u> (koniunkcja dwóch nierówności liniowych lub modułu)

- zapisujemy nierówność w postaci, np. $\left(x+\frac{11}{2}\right)^2 \le \frac{1}{4}$ lub $\left|x+\frac{11}{2}\right| \le \frac{1}{2}$
- zapisujemy nierówności: $x+\frac{11}{2} \le \frac{1}{2}$ i $x+\frac{11}{2} \ge -\frac{1}{2}$
- obliczamy: $x \ge -6$ i $x \le -5$
- zapisujemy zbiór rozwiązań nierówności: $x \in \langle -6, -5 \rangle$

<u>Schemat oceniania V sposobu rozwiązania</u>

Zdający otrzymuje .... 1 pkt

gdy:

- zapisze nierówność kwadratową w postaci alternatywy dwóch nierówności liniowych:
  $x+\frac{11}{2} \le \frac{1}{2}$ i $x+\frac{11}{2} \ge -\frac{1}{2}$ i na tym poprzestanie lub dalej popełni błędy

Zdający otrzymuje .... 2 pkt

gdy:

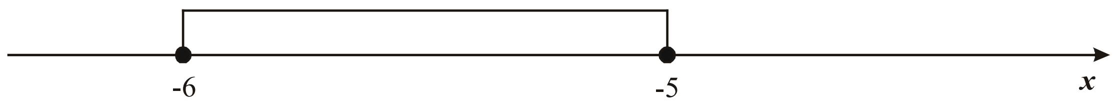
- zapisze zbiór rozwiązań nierówności : $\langle -6, -5 \rangle$ lub $x \in \langle -6, -5 \rangle$ lub $x \ge -6$ i $x \le -5$

albo

- sporządzi ilustrację geometryczną (oś liczbowa, wykres) i zapisze zbiór rozwiązań nierówności w postaci $x \ge -6$, $x \le -5$

albo

- poda zbiór rozwiązań nierówności w postaci graficznej z poprawnie zaznaczonymi końcami przedziałów.



<u>Uwaga:</u>

1. Przyznajemy 2 punkty za rozwiązanie, w którym zdający poprawnie obliczy pierwiastki trójmianu $x=-6$, $x=-5$ i zapisze, np. $x \in \langle -6, 5 \rangle$, popełniając tym samym błąd przy przepisywaniu jednego z pierwiastków.
2. W związku z rozbieżnością w rozumieniu i używaniu spójników w języku potocznym i formalnym języku matematyki akceptujemy zapis, np. $x \in (-\infty, -5\rangle$ i $x \in \langle -6, \infty)$

Zadanie 27. (***2 pkt***)

Rozwiąż równanie $x^3+2x^2-5x-10=0$.

<u>I sposób rozwiązania</u> (metoda grupowania)

Przedstawiamy lewą stronę równania w postaci iloczynowej stosując metodę grupowania wyrazów

$(x+2)(x^2-5)=0$

Stąd $x=-2$ lub $x=-\sqrt{5}$ lub $x=\sqrt{5}$.

Schemat oceniania I sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje .... 1 pkt
gdy pogrupuje wyrazy do postaci, z której łatwo można doprowadzić do postaci iloczynowej, np. $x^2(x+2)-5(x+2)=0$ lub $x(x^2-5)+2(x^2-5)=0$ i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy

Zdający otrzymuje .... 2 pkt
gdy wyznaczy bezbłędnie wszystkie rozwiązania równania: $x=-\sqrt{5}, x=-2, x=\sqrt{5}$.

II sposób rozwiązania (metoda dzielenia)
Stwierdzamy, że liczba -2 jest pierwiastkiem wielomianu. Dzielimy wielomian $x^3+2x^2-5x-10$ przez dwumian $(x+2)$ i otrzymujemy (x^2-5). Zapisujemy równanie w postaci $(x+2)(x^2-5)=0$. Stąd $x=-2$ lub $x=-\sqrt{5}$ lub $x=\sqrt{5}$.

Schemat oceniania II sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje .... 1 pkt
gdy podzieli wielomian $x^3+2x^2-5x-10$ przez dwumian $(x+2)$ otrzymując (x^2-5) i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy

Zdający otrzymuje .... 2 pkt
gdy wyznaczy bezbłędnie wszystkie rozwiązania równania: $x=-\sqrt{5}$, $x=-2$, $x=\sqrt{5}$.

Uwaga:
Jeśli zdający wykonał dzielenie przez dwumian $(x-p)$ nie zapisując, że p jest jednym z rozwiązań równania $x^3+2x^2-5x-10=0$ i w końcowej odpowiedzi pominie pierwiastek p podając tylko pierwiastki trójmianu kwadratowego, to przyznajemy 2 punkty.

Zadanie 28. (*2 pkt*)
Przeciwprostokątna trójkąta prostokątnego jest dłuższa od jednej przyprostokątnej o 1 cm i od drugiej przyprostokątnej o 32 cm. Oblicz długości boków tego trójkąta.

Rozwiązanie
Niech x oznacza długość przeciwprostokątnej. Z tw. Pitagorasa otrzymujemy równanie
$(x-1)^2+(x-32)^2=x^2$ i $x>32$
Po przekształceniach otrzymujemy równanie
$x^2-66x+1025=0$
$x_1=25$ - sprzeczne z założeniem
$x_2=41$
Odpowiedź: Przeciwprostokątna ma długość 41 cm, jedna przyprostokątna ma długość 9 cm a druga ma długość 40 cm.

Schemat oceniania

Zdający otrzymuje .... 1 pkt

gdy:

- prawidłowo zinterpretuje warunki zadania i korzystając z tw. Pitagorasa zapisze równanie kwadratowe z jedną niewiadomą, np.: $c^2 - 66c + 1025 = 0$, gdzie c jest długością przeciwprostokątnej i na tym poprzestanie lub błędnie rozwiąże otrzymane równanie

albo

- $a^2 - 64a + 960 = 0$, gdzie a jest długością dłuższej przyprostokątnej i na tym poprzestanie lub błędnie rozwiąże otrzymane równanie

albo

- $b^2 - 2b - 63 = 0$, gdzie b jest długością krótszej przyprostokątnej i na tym poprzestanie lub błędnie rozwiąże otrzymane równanie

albo

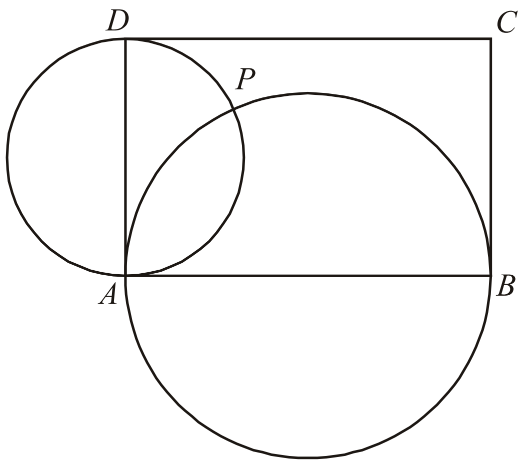
- poprawnie rozwiąże równanie i na tym poprzestanie (nie obliczy długości boków tego trójkąta)

Zdający otrzymuje .... 2 pkt

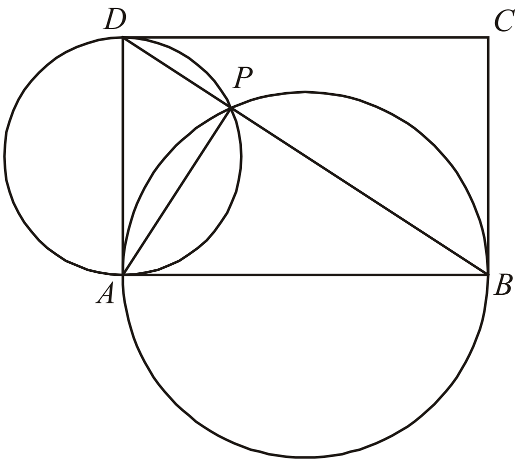
gdy poda poprawne rozwiązanie: jedna przyprostokątna ma długość 9 cm, druga ma długość 40 cm, a przeciwprostokątna ma długość 41 cm.

Zadanie 29. (***2 pkt***)

Dany jest prostokąt $ABCD$. Okręgi o średnicach AB i AD przecinają się w punktach A i P (zobacz rysunek). Wykaż, że punkty B, P i D leżą na jednej prostej.



I sposób rozwiązania



Łączymy punkt P z punktami A, B i D. Kąt APD jest oparty na półokręgu, więc $|\sphericalangle APD| = 90^\circ$. Podobnie kąt APB jest oparty na półokręgu, więc $|\sphericalangle APB| = 90^\circ$. Zatem

$|\sphericalangle DPB| = |\sphericalangle APD| + |\sphericalangle APB| = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$

Schemat oceniania I sposobu rozwiązania

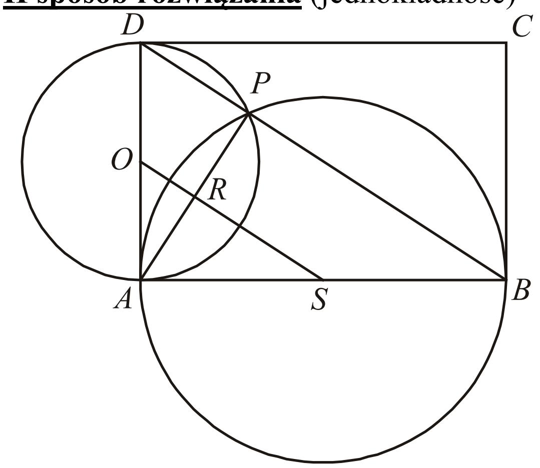
Zdający otrzymuje .... 1 pkt

gdy zauważy, że $|\sphericalangle APD| = |\sphericalangle APB| = 90^\circ$ i na tym poprzestanie

Zdający otrzymuje .... 2 pkt

gdy zauważy, że $|\sphericalangle APD| = |\sphericalangle APB| = 90^\circ$ i stąd wywnioskuje, że punkty B, P i D są współliniowe.

II sposób rozwiązania (jednokładność)



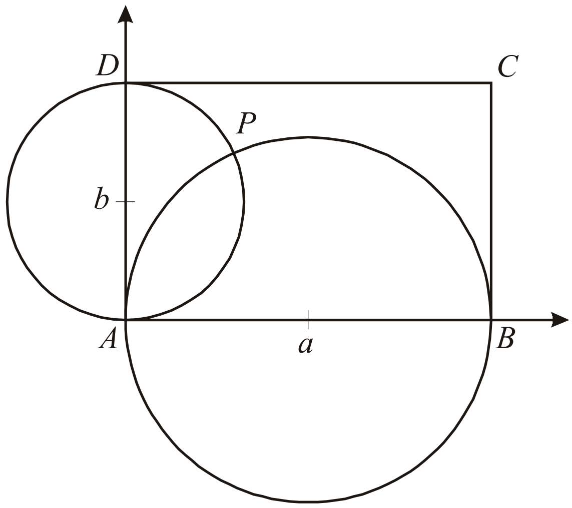
Niech O i S będą środkami obu okręgów i R będzie punktem przecięcia odcinków AP i OS.
Wtedy punkty D, P i B są obrazami punktów współliniowych O, R, S w jednokładności o środku A i skali 2, więc są współliniowe.

Schemat oceniania II sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje .... 2 pkt

gdy zauważy, że punkty D, P i B są obrazami punktów współliniowych O, R, S w jednokładności o środku A i skali 2, więc są współliniowe.

<u>III sposób rozwiązania</u> (metoda analityczna)



Umieszczamy okręgi w układzie współrzędnych tak, jak na rysunku. Zapisujemy układ równań (równania okręgów):

$$\begin{cases}(x-a)^2+y^2=a^2\\ x^2+(y-b)^2=b^2\end{cases}$$

Rozwiązując ten układ równań otrzymujemy współrzędne punktu P

$$P=\left(\frac{2ab^2}{a^2+b^2},\frac{2a^2b}{a^2+b^2}\right)$$

Równanie prostej BD: $\frac{x}{2a}+\frac{y}{2b}=1$.

Współrzędne punktu P spełniają to równanie.

<u>Schemat oceniania III sposobu rozwiązania</u>

Zdający otrzymuje .... 1 pkt

gdy zapisze układ równań: $\begin{cases}(x-a)^2+y^2=a^2\\ x^2+(y-b)^2=b^2\end{cases}$ i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy

Zdający otrzymuje .... 2 pkt

gdy wykaże, że punkt P leży na prostej BD.

Zadanie 30. (*2 pkt*)
Uzasadnij, że jeśli $\left(a^2+b^2\right)\left(c^2+d^2\right)=\left(ac+bd\right)^2$, to $ad=bc$.

Rozwiązanie
Po otwarciu nawiasów otrzymujemy

$a^2c^2+a^2d^2+b^2c^2+b^2d^2=a^2c^2+2abcd+b^2d^2$

$a^2d^2-2abcd+b^2c^2=0$

$\left(ad-bc\right)^2=0$

$ad=bc$

Schemat oceniania
Zdający otrzymuje .... 1 pkt
gdy przekształci tezę do postaci $a^2d^2+b^2c^2=2abcd$

$$\cancel{a^2c^2}+a^2d^2+b^2c^2+\cancel{b^2d^2}=\cancel{a^2c^2}+2abcd+\cancel{b^2d^2}$$

$$a^2d^2+b^2c^2=2abcd$$

Zdający otrzymuje .... 2 pkt
gdy doprowadzi tezę do postaci

$$a^2d^2+b^2c^2=2abcd$$

$$\left(ad-bc\right)^2=0$$

$$ad=bc$$

Uwaga:
Jeżeli zdający podstawi konkretne wartości w miejsce *a*, *b*, *c*, *d* to przyznajemy 0 punktów.

Zadanie 31. (*2 pkt*)
Ile jest liczb naturalnych czterocyfrowych, w zapisie których pierwsza cyfra jest parzysta a pozostałe nieparzyste?

Rozwiązanie
W zapisie danej liczby na pierwszym miejscu może być jedna z cyfr: 2, 4, 6, 8, czyli mamy 4 możliwości. Na drugim miejscu może być jedna z cyfr: 1, 3, 5, 7, 9, czyli mamy 5 możliwości. Tak samo na trzecim i czwartym miejscu. Zatem mamy $4\cdot5^3=500$ takich liczb.

Schemat oceniania
Zdający otrzymuje .... 1 pkt
gdy:
- poprawnie obliczy, ile jest możliwości występowania cyfry na pierwszym miejscu i dalej popełnia błąd lub na tym poprzestanie

albo
- poprawnie obliczy, ile jest możliwości występowania cyfry na drugim, trzecim i czwartym miejscu a popełni błąd podając liczbę cyfr na pierwszym miejscu

Zdający otrzymuje .... 2 pkt
gdy:
- poprawnie obliczy, ile jest szukanych liczb: $4\cdot5^3=500$

Uwaga:
Jeżeli zdający zapisze, że cyfry są różne (błędnie interpretując treść zadania) i poprawnie obliczy, ile jest szukanych liczb: $4\cdot 5\cdot 4\cdot 3=240$ to otrzymuje 2 punkty.

Zadanie 32. (*4 pkt*)
Z pojemnika, w którym jest siedem kul ponumerowanych kolejnymi liczbami naturalnymi 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, losujemy dwa razy po jednej kuli bez zwracania. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia A polegającego na tym, że otrzymamy kule oznaczone liczbami, z których pierwsza będzie mniejsza od 4 i druga będzie parzysta.

Metoda I (*klasyczna definicja prawdopodobieństwa*):
Przyjmujemy, że zbiór Ω wszystkich zdarzeń elementarnych to zbiór par (x,y) różnych liczb naturalnych od 1 do 7. Mamy model klasyczny.
$|\Omega| = 7\cdot 6 = 42$

$A=\{(1,2),(1,4),(1,6),(2,4),(2,6),(3,2),(3,4),(3,6)\}$, $|A|=8$ i w efekcie $P(A)=\frac{8}{42}=\frac{4}{21}$

Schemat oceniania

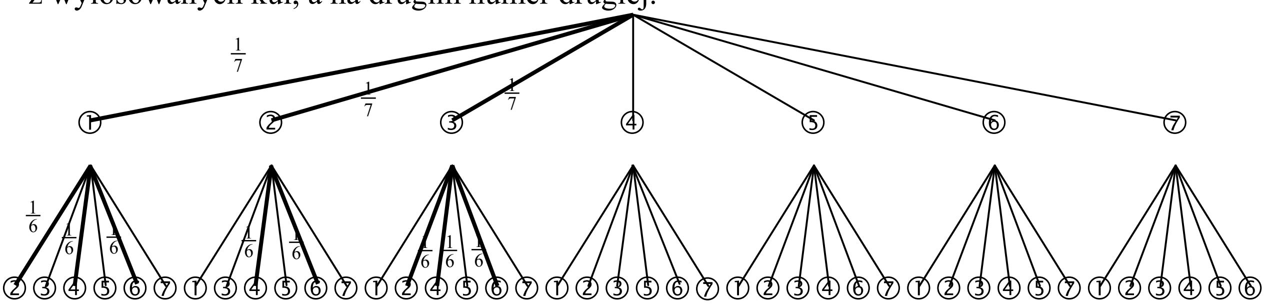
Istotny postęp .... 1 pkt
Punkt przyznajemy, gdy zdający napisze $|\Omega|=42$ i na tym zakończy.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 pkt
Zapisanie liczb zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A:
$|A|=8$
Uwaga:
Jeżeli zdający wypisze bezbłędnie wszystkie zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniu A, ale błędnie zapisze ich liczbę, to otrzymuje 2 pkt.

Rozwiązanie bezbłędne .... 4 pkt
Obliczenie prawdopodobieństwa zdarzenia A:

$$P(A)=\frac{4}{21}$$

Metoda II (*metoda drzewa*):
Przedstawmy drzewo, w którym na pierwszym poziomie jest numer pierwszej z wylosowanych kul, a na drugim numer drugiej.



$$P(A)=\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{6}+\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{6}+\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{6}+\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{6}+\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{6}+\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{6}+\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{6}+\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{6}=\frac{8}{42}=\frac{4}{21}$$

Schemat oceniania

Istotny postęp .... 1 pkt

Narysowanie pełnego drzewa albo drzewa niepełnego, ale w którym są wszystkie istotne gałęzie.

Uwagi:

1. Oceniamy rozwiązanie na 0 punktów, gdy w dalszej części rozwiązania zdający dodaje prawdopodobieństwa wzdłuż gałęzi zamiast mnożyć.
2. Jeżeli zdający opisał prawdopodobieństwa tylko na istotnych gałęziach, to kwalifikujemy to do kategorii „pokonanie zasadniczych trudności zadania”.
3. Jeżeli rozwiązujący popełni błąd rachunkowy lub nieuwagi i na tym zakończy, to otrzymuje 3 pkt.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 pkt

- Wskazanie na drzewie właściwych gałęzi (np. pogrubienie gałęzi lub zapisanie prawdopodobieństw tylko na istotnych gałęziach, podkreślenie istotnych gałęzi).
- Jeżeli rozwiązujący nie wskazuje na drzewie odpowiednich gałęzi, ale z dalszych obliczeń można wywnioskować, że wybiera właściwe gałęzie

Rozwiązanie bezbłędne .... 4 pkt.

Obliczenie prawdopodobieństwa zdarzenia *A*:

$$P(A)=\frac{4}{21}$$

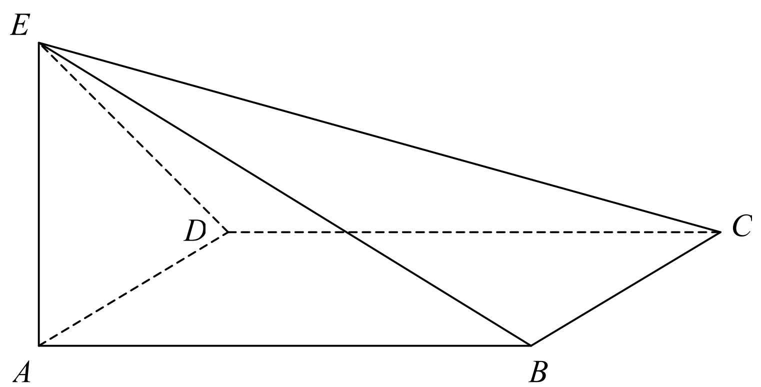
Metoda III (tabela)

Rozwiązanie. Narysowanie tabeli 7x7 i usunięcie przekątnej. W tabeli zostały 42 istotne pola. Zaznaczenie pól sprzyjających zdarzeniu *A* i obliczenie prawdopodobieństwa.

Schemat taki jak w metodzie I.

Zadanie 33. (4 *pkt*)

Podstawą ostrosłupa *ABCDE* jest prostokąt *ABCD*. Krawędź *AE* jest wysokością ostrosłupa (zobacz rysunek). Oblicz długość krawędzi *EC*, jeśli wiadomo, że $|AE|=6$, $|BE|=22$, $|DE|=9$.



Rozwiązanie
Rozwiązanie zadania składa się z następujących etapów:

- obliczenie $|AB|^2 = 448$
- obliczenie $|AD|^2 = 45$
- obliczenie $|AC|^2 = 493$
- obliczenie $|EC|^2 = 529$, $|EC| = 23$

Za poprawne rozwiązanie każdego etapu zdający otrzymuje **1 punkt**.

Schemat oceniania
Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 1 pkt
Obliczenie $|BC|^2 = |AD|^2 = 45$ lub $|AB|^2 = |CD|^2 = 448$
Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 2 pkt
Zauważenie, że $|\sphericalangle EBC| = 90°$ lub $|\sphericalangle EDC| = 90°$

Uwaga:
Wystarczy, że zdający zaznaczy kąt prosty na rysunku lub zastosuje poprawnie tw. Pitagorasa w trójkącie *EBC* lub *DCE*.

Rozwiązanie zadania do końca, lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) .... 3 pkt

Rozwiązanie bezbłędne.. 4 pkt
Obliczenie $|EC| = 23$

Uwaga:
Jeśli zdający zauważył tylko, że $|\sphericalangle EBC| = 90°$ lub $|\sphericalangle CDE| = 90°$ to otrzymuje 1 punkt

Zadanie 34. (5 *pkt*)
Droga z miasta A do miasta B ma długość 474 km. Z każdego miasta wyrusza samochód jadący do drugiego miasta. Samochód jadący z miasta A do miasta B wyrusza godzinę później niż drugi samochód. Samochody te spotykają się w odległości 300 km od miasta B. Do chwili spotkania średnia prędkość samochodu, który wyjechał z miasta A była o 17 km/h mniejsza od średniej prędkości drugiego samochodu. Oblicz średnie prędkości obu samochodów do chwili spotkania.

Rozwiązanie
Niech *v* oznacza średnią prędkość samochodu, który wyjechał z B i niech *t* oznacza czas od chwili wyjazdu tego samochodu do chwili spotkania. Zapisujemy układ równań

$$\begin{cases} v \cdot t = 300 \\ (v-17)(t-1) = 174 \end{cases}$$

Przekształcając drugie równanie przy warunku $v \cdot t = 300$ otrzymujemy
$v = 143 - 17t$
Otrzymaną wartość *v* podstawiamy do pierwszego równania i otrzymujemy
$17t^2 - 143t + 300 = 0$
Rozwiązaniami tego równania są liczby

$t_1 = \frac{75}{17}$ i $t_2 = 4$

Stąd $v_1 = 68$, $v_2 = 75$

Odpowiedź: Pierwsze rozwiązanie $v_A = 51$ km/h, $v_B = 68$ km/h

Drugie rozwiązanie $v_A = 58$ km/h, $v_B = 75$ km/h

Uwaga:
Możemy otrzymać inne równania kwadratowe:
$17t_A^2 - 109t_A + 174 = 0$ lub $v_A^2 - 109v_A + 2958 = 0$ lub $v_B^2 - 143v_B + 5100 = 0$

Schemat oceniania
Uwaga:
W poniżej zamieszczonym schemacie używamy niewiadomych *v*, *t* i *s* oznaczających odpowiednio, prędkość, czas i drogę. Oczywiście w pracach maturalnych te niewiadome mogą być oznaczane w inny sposób. Nie wymagamy, by te niewiadome były wyraźnie opisane na początku rozwiązania, o ile z postaci równań jasno wynika ich znaczenie.

Rozwiązanie, w którym postęp jest wprawdzie niewielki, ale konieczny na drodze do całkowitego rozwiązania zadania ....1 pkt
Obliczenie, jaką drogę do chwili spotkania pokonał samochód jadący z miasta A: 174 km
Zapisanie równania:
$(v_B - 17)(t_B - 1) = 174$ lub $(v_A + 17)(t_A + 1) = 300$.
Uwaga:
Przyznajemy 0 pkt, jeżeli zdający napisze tylko równanie $v_B \cdot t_B = 300$ lub $v_A \cdot t_A = 174$ lub odpowiednio napisze, że $(v_B + 17)\cdot(t_B + 1) = 174$ lub $(v_A - 17)\cdot(t_A - 1) = 300$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp..2 pkt
Zapisanie układu równań np.

$$\begin{cases} (v_B - 17)(t_B - 1) = 174 \\ v_B \cdot t_B = 300 \end{cases} \quad \text{lub} \quad \begin{cases} v_A \cdot t_A = 174 \\ (v_A + 17)(t_A + 1) = 300 \end{cases}$$

Pokonanie zasadniczych trudności zadania...3 pkt
Sprowadzenie do równania wymiernego z jedną niewiadomą v_A lub t_A lub v_B lub t_B, np.

$$\left(\frac{174}{t_A} + 17\right)(t_A + 1) = 300 \quad \text{lub} \quad (v_A + 17)\left(\frac{174}{v_A} + 1\right) = 300$$

$$\text{lub} \quad \left(\frac{300}{t_B} - 17\right)(t_B - 1) = 174 \quad \text{lub} \quad (v_B - 17)\left(\frac{300}{v_B} - 1\right) = 174$$

Zdający nie musi zapisywać układu równań, może bezpośrednio zapisać równanie z jedną niewiadomą.

Rozwiązanie zadania do końca, lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe)... 4 pkt

- rozwiązanie równania z niewiadomą v_B z błędem rachunkowym

albo

- rozwiązanie równania z niewiadomą t_A bezbłędnie: $t_{A_1} = 3\ h$, $t_{A_2} = 3\frac{7}{17}\ h$ i nieobliczenie prędkości samochodu jadącego z miasta A

albo

- rozwiązanie równania z niewiadomą t_B bezbłędnie: $t_{B_1} = 4\ h$, $t_{B_2} = 4\frac{7}{17}\ h$ i nieobliczenie prędkości samochodu jadącego z miasta B

albo

- obliczenie t_B lub t_A z błędem rachunkowym i konsekwentne obliczenie prędkości

albo

- rozwiązanie równania kwadratowego i przyjęcie tylko jednego rozwiązania lub prędkości tylko jednego samochodu.

Rozwiązanie bezbłędne..5 pkt

Obliczenie szukanych prędkości: $\begin{cases} v_A = 58 \text{ km/h} \\ v_B = 75 \text{ km/h} \end{cases}$ lub $\begin{cases} v_A = 51 \text{ km/h} \\ v_B = 68 \text{ km/h} \end{cases}$

Uwaga:

Zdający otrzymuje 5 punktów tylko w przypadku, jeżeli prawidłowo przyporządkuje prędkości.