Egzamin maturalny z matematyki
CZERWIEC 2011

Klucz punktowania do zadań zamkniętych
oraz
schemat oceniania do zadań otwartych

POZIOM PODSTAWOWY

Klucz punktowania do zadań zamkniętych

Nr zad	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
Odp.	**D**	**B**	**A**	**B**	**C**	**B**	**A**	**B**	**D**	**B**	**C**	**D**	**C**	**A**	**A**	**C**	**B**	**D**	**C**	**B**	**A**	**D**

Schemat oceniania do zadań otwartych

Zadanie 23. ***(2 pkt)***
Rozwiąż nierówność $-2x^2+2x+24\geq 0$.

<u>**Rozwiązanie**</u>

Rozwiązanie nierówności kwadratowej składa się z dwóch etapów.
Pierwszy etap może być realizowany na 2 sposoby:

<u>I sposób rozwiązania</u> (realizacja pierwszego etapu)
Znajdujemy pierwiastki trójmianu kwadratowego $-2x^2+2x+24$

- obliczamy wyróżnik tego trójmianu:

  $\Delta = 4+192=196$ i stąd $x_1=\frac{-2-14}{-4}=4$ oraz $x_2=\frac{-2+14}{-4}=-3$

albo

- stosujemy wzory Viète'a:

  $x_1+x_2=1$ oraz $x_1\cdot x_2=-12$ i stąd $x_1=4$ oraz $x_2=-3$

albo

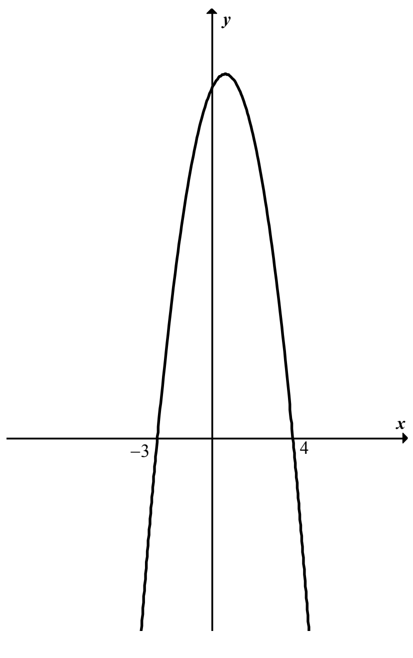
- podajemy je bezpośrednio (explicite lub zapisując postać iloczynową trójmianu lub zaznaczając na wykresie)

  $x_1=4$, $x_2=-3$

  lub

  $-2(x-4)(x+3)\geq 0$

  lub



II sposób rozwiązania (realizacja pierwszego etapu)
Wyznaczamy postać kanoniczną trójmianu kwadratowego

$$-2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{49}{2}\geq 0$$

a następnie

- przekształcamy nierówność, tak by jej lewa strona była zapisana w postaci iloczynowej
$$-2\left(x-\frac{1}{2}-\frac{7}{2}\right)\cdot\left(x-\frac{1}{2}+\frac{7}{2}\right)\geq 0$$
$$-2(x-4)\cdot(x+3)\geq 0$$

Drugi etap rozwiązania:
Podajemy zbiór rozwiązań nierówności $\langle -3, 4\rangle$.

Schemat oceniania

Zdający otrzymuje .... 1 pkt

gdy:

- zrealizuje pierwszy etap rozwiązania i na tym poprzestanie lub błędnie zapisze zbiór rozwiązań nierówności, np.
  - obliczy lub poda pierwiastki trójmianu kwadratowego $x=4$, $x=-3$ i na tym poprzestanie lub błędnie zapisze zbiór rozwiązań nierówności
  - zaznaczy na wykresie miejsca zerowe funkcji $f(x)=-2x^2+2x+24$ i na tym poprzestanie lub błędnie zapisze zbiór rozwiązań nierówności
  - rozłoży trójmian kwadratowy na czynniki liniowe, np. $-2(x-4)\cdot(x+3)$ i na tym poprzestanie lub błędnie rozwiąże nierówność
- realizując pierwszy etap popełni błąd (ale otrzyma dwa różne pierwiastki) i konsekwentnie do tego rozwiąże nierówność, np.
  - popełni błąd rachunkowy przy obliczaniu wyróżnika lub pierwiastków trójmianu kwadratowego i konsekwentnie do popełnionego błędu rozwiąże nierówność
  - błędnie zapisze równania wynikające ze wzorów Viète'a: $x_1+x_2=1$ i $x_1\cdot x_2=-12$ lub $x_1+x_2=-1$ i $x_1\cdot x_2=12$ i konsekwentnie do tego rozwiąże nierówność,

Zdający otrzymuje .... 2 pkt

gdy:

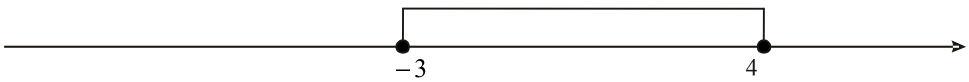
- poda zbiór rozwiązań nierówności : $\langle -3, 4\rangle$ lub $x\in\langle -3, 4\rangle$ lub $-3\leq x\leq 4$,

albo

- sporządzi ilustrację geometryczną (oś liczbowa, wykres) i zapisze zbiór rozwiązań nierówności w postaci $x\geq -3$, $x\leq 4$,

albo

- poda zbiór rozwiązań nierówności w postaci graficznej z poprawnie zaznaczonymi końcami przedziałów



Uwagi

1. Jeżeli zdający poprawnie obliczy pierwiastki trójmianu $x_1 = -3$ i $x_2 = 4$ i zapisze $x \in \langle 3, 4 \rangle$, popełniając tym samym błąd przy przepisywaniu jednego z pierwiastków, to za takie rozwiązanie otrzymuje **2 punkty**.
2. W związku z rozbieżnością w rozumieniu i używaniu spójników w języku potocznym i formalnym języku matematycznym akceptujemy zapis $x \geq -3$, $x \leq 4$.
3. Jeżeli błąd zdającego w obliczeniu pierwiastków trójmianu nie wynika z wykonywanych przez niego czynności (zdający rozwiązuje „swoje zadanie"), to otrzymuje **0 punktów** za całe zadanie.

Zadanie 24. ***(2 pkt)***

Funkcja f jest określona wzorem $f(x) = \frac{2x - b}{x - 9}$, dla $x \neq 9$ oraz $f(14) = 5$. Oblicz współczynnik *b*.

Rozwiązanie

Warunek $f(14) = 5$ zapisujemy w postaci równania z niewiadomą *b*: $5 = \frac{2 \cdot 14 - b}{14 - 9}$.

Rozwiązujemy to równanie i obliczamy współczynnik *b*: $b = 3$.

Schemat oceniania

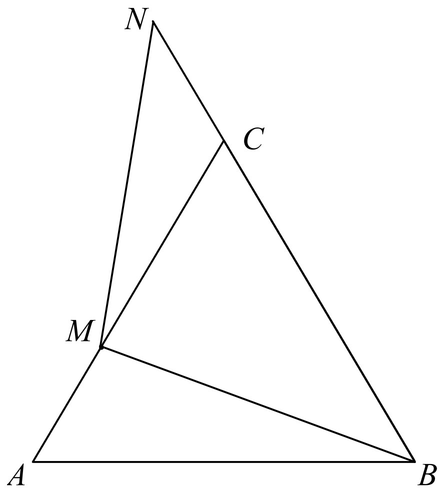
Zdający otrzymuje ....1 pkt

gdy poprawnie zapisze równanie z niewiadomą *b*, np. $5 = \frac{2 \cdot 14 - b}{14 - 9}$ lub $5 \cdot 5 = 28 - b$.

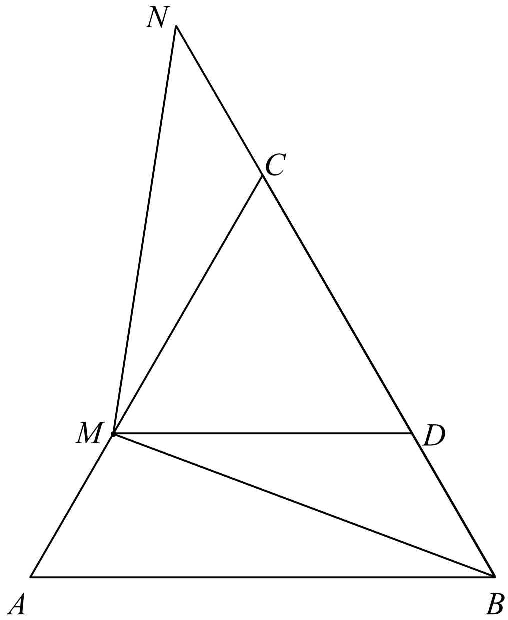
Zdający otrzymuje ....2 pkt

gdy obliczy współczynnik $b = 3$.

Zadanie 25. (*2 pkt*)
Na poniższym rysunku trójkąt ABC jest równoboczny, a punkty B, C, N są współliniowe. Na boku AC wybrano punkt M, tak że $|AM| = |CN|$. Udowodnij, że $|BM| = |MN|$.



<u>I sposób rozwiązania</u>



Rysujemy odcinek MD równoległy do odcinka AB.
Uzasadniamy, że trójkąty BDM i MCN są przystające na podstawie cechy *bkb*:

- $|BD| = |CN|$, bo $|BD| = |AM|$
- $|MD| = |CM|$, bo trójkąt MDC jest równoboczny
- $|\sphericalangle BDM| = 120^\circ = |\sphericalangle NCM|$.

Zatem $|BM| = |MN|$.

Schemat oceniania I sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje ....1 pkt
gdy napisze, że trójkąty *BDM* i *MCN* są przystające i wyprowadzi stąd wniosek, że $|BM| = |MN|$

Zdający otrzymuje ....2 pkt
gdy poprawnie uzasadni, że trójkąty *ACD* i *BCE* są przystające i wyprowadzi stąd wniosek, że $|BM| = |MN|$.

Uwaga
Zdający może też dorysować odcinek $MD \parallel BC$ i analogicznie pokazać, że trójkąty *BMD* i *MNC* są przystające.

II sposób rozwiązania

Z twierdzenia cosinusów dla trójkąta *ABM* obliczamy $|BM|^2$:

$$|BM|^2 = |AM|^2 + |AB|^2 - 2|AM|\cdot|AB|\cdot\cos 60^\circ =$$
$$= |AM|^2 + |AB|^2 - 2|AM|\cdot|AB|\cdot\frac{1}{2} =$$
$$= |AM|^2 + |AB|^2 - |AM|\cdot|AB|.$$

Z twierdzenia cosinusów dla trójkąta *MCN* obliczamy $|MN|^2$:

$$|MN|^2 = |MC|^2 + |CN|^2 - 2|MC|\cdot|CN|\cdot\cos 120^\circ =$$
$$= |MC|^2 + |CN|^2 - 2|MC|\cdot|CN|\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = .$$
$$= |MC|^2 + |CN|^2 + |MC|\cdot|CN|$$

Ponieważ $|AM| = |CN|$ i $|MC| = |AB| - |AM|$, więc

$$|MN|^2 = \left(|AB| - |AM|\right)^2 + |AM|^2 + \left(|AB| - |AM|\right)\cdot|AM| =$$
$$= |AB|^2 + |AM|^2 - 2\cdot|AB|\cdot|AM| + |AM|^2 + |AB|\cdot|AM| - |AM|^2 = |AB|^2 + |AM|^2 - |AB|\cdot|AM|$$

Zatem $|BM|^2 = |MN|^2$, czyli $|BM| = |MN|$

Schemat oceniania II sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje ....1 pkt

gdy korzystając z twierdzenia cosinusów obliczy kwadraty długości odcinków *BM* i *MN*.

Zdający otrzymuje ....2 pkt

gdy poprawnie uzasadni, że $|BM| = |MN|$.

Zadanie 26. (*2 pkt*)

Dane są wielomiany $P(x)=-2x^3+3x^2-1$, $Q(x)=2x^2-x-1$ oraz $W(x)=ax+b$. Wyznacz współczynniki *a* i *b* tak, by wielomian $P(x)$ był równy iloczynowi $W(x)\cdot Q(x)$.

I sposób rozwiązania

Wyznaczamy iloczyn $W(x)\cdot Q(x)$:

$W(x)\cdot Q(x)=(2x^2-x-1)(ax+b)$

$W(x)\cdot Q(x)=2ax^3+2bx^2-ax^2-bx-ax-b$

$W(x)\cdot Q(x)=2ax^3+(2b-a)x^2-(a+b)x-b$

Porównujemy współczynniki wielomianów $P(x)$ i $W(x)\cdot Q(x)$ i zapisujemy układ równań:

$$\begin{cases} 2a=-2 \\ 2b-a=3 \\ a+b=0 \\ b=1 \end{cases}$$

Z pierwszego równania otrzymujemy $a=-1$, z ostatniego $b=1$. Sprawdzamy, że obliczone *a* oraz *b* spełniają pozostałe dwa równania.

Schemat oceniania I sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje .... 1 pkt

gdy zapisze wielomian $W(x)\cdot Q(x)$ w postaci $2ax^3+(2b-a)x^2-(a+b)x-b$ i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy

Zdający otrzymuje .... 2 pkt

gdy:
- obliczy $a=-1$ i $b=1$

albo
- zapisze $W(x)=-x+1$

II sposób rozwiązania

Sprawdzamy, że liczba 1 jest jednym z miejsc zerowych wielomianu $P(x)=-2x^3+3x^2-1$ i dzielimy wielomian $-2x^3+3x^2-1$ przez dwumian $x-1$.

$$\begin{array}{l} (-2x^3+3x^2-1):(x-1)=-2x^2+x+1 \\ \underline{\;2x^3-2x^2\;} \\ \qquad\quad x^2-1 \\ \qquad \underline{-x^2+x} \\ \qquad\qquad x-1 \\ \qquad\quad \underline{-x+1} \\ \qquad\qquad = = \end{array}$$

Następnie zapisujemy $P(x)=(-2x^2+x+1)\cdot(x-1)$, czyli $P(x)=(2x^2-x-1)\cdot(-x+1)$.
Porównując współczynniki wielomianów $W(x)=ax+b$ oraz $-x+1$ otrzymujemy $a=-1,\ b=1$.

<u>Schemat oceniania II sposobu rozwiązania</u>

Zdający otrzymuje ....1 pkt

gdy podzieli wielomian $P(x)=-2x^3+3x^2-1$ przez dwumian $x-1$ i zapisze

$P(x)=(-2x^2+x+1)\cdot(x-1)$ lub $P(x)=-2(x-1)\cdot\left(x+\frac{1}{2}\right)\cdot(x-1)$

i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy

Zdający otrzymuje ....2 pkt

gdy:

- obliczy $a=-1$ i $b=1$

albo

- zapisze $W(x)=-x+1$.

<u>Uwaga</u>

Jeżeli zdający sprawdzi, że liczba $\left(-\frac{1}{2}\right)$ jest jednym z miejsc zerowych wielomianu $P(x)=-2x^3+3x^2-1$, podzieli wielomian $-2x^3+3x^2-1$ przez dwumian $x+\frac{1}{2}$ i zapisze $P(x)=(-2x^2+4x-2)\cdot\left(x+\frac{1}{2}\right)$ lub $P(x)=-2(x-1)\cdot(x-1)\cdot\left(x+\frac{1}{2}\right)$ i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy, to otrzymuje **1 punkt**.

<u>III sposób rozwiązania</u>

Dzielimy wielomian $P(x)=-2x^3+3x^2-1$ przez wielomian $Q(x)=2x^2-x-1$

$$
\begin{array}{l}
(-2x^3+3x^2-1):(2x^2-x-1)=-x+1 \\
\quad \underline{2x^3-x^2-x} \\
\quad = \quad 2x^2-x-1 \\
\qquad \underline{-2x^2+x+1} \\
\qquad\quad = \quad = \quad =
\end{array}
$$

i zapisujemy $P(x)=(2x^2-x-1)\cdot(-x+1)$.

Z porównania odpowiednich współczynników, otrzymujemy $a=-1,\ b=1$.

Schemat oceniania III sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje .... 1 pkt
gdy podzieli wielomian $P(x) = -2x^3 + 3x^2 - 1$ przez wielomian $Q(x) = 2x^2 - x - 1$ i zapisze w postaci $P(x) = (2x^2 - x - 1)\cdot(-x+1)$ lub $P(x) = -2(x-1)\cdot\left(x+\frac{1}{2}\right)\cdot(x-1)$ i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy

Zdający otrzymuje .... 2 pkt
gdy:
- obliczy $a = -1$ i $b = 1$

albo
- zapisze $W(x) = -x + 1$

Zadanie 27. ***(2 pkt)***
Uzasadnij, że dla każdej dodatniej liczby całkowitej n liczba $3^{n+2} - 2^{n+2} + 3^n - 2^n$ jest wielokrotnością liczby 10.

Rozwiązanie

Liczbę $3^{n+2} - 2^{n+2} + 3^n - 2^n$ przedstawiamy w postaci
$3^{n+2} - 2^{n+2} + 3^n - 2^n = 9\cdot 3^n - 4\cdot 2^n + 3^n - 2^n = 3^n(9+1) - 2^n(4+1) = 10\cdot 3^n - 5\cdot 2\cdot 2^{n-1} =$
$= 10\left(3^n - 2^{n-1}\right) = 10k$, gdzie $k = 3^n - 2^{n-1}$ jest liczbą całkowitą.
Zatem liczba $3^{n+2} - 2^{n+2} + 3^n - 2^n$ jest wielokrotnością liczby 10.

Schemat oceniania

Zdający otrzymuje .... 1 pkt
gdy zapisze liczbę $3^{n+2} - 2^{n+2} + 3^n - 2^n$ w postaci $3^n\cdot 10 - 2^n\cdot 5$ i nie uzasadni, że liczba $2^n\cdot 5$ jest podzielna przez 10

Zdający otrzymuje .... 2 pkt
gdy przeprowadzi pełne rozumowanie, np.:
- przekształci liczbę $3^n\cdot 10 - 2^n\cdot 5$ do postaci $10\left(3^n - 2^{n-1}\right) = 10k$, gdzie $k = 3^n - 2^{n-1}$ jest liczbą całkowitą

albo
- przekształci liczbę $3^n\cdot 10 - 2^n\cdot 5$ do postaci $10\left(3^n - 2^{n-1}\right)$ i zapisze, że $3^n - 2^{n-1}$ jest liczbą całkowitą

albo
- zapisze liczbę w postaci $3^n\cdot 10 - 2^n\cdot 5$ i uzasadni, że jest podzielna przez 10

Uwaga

Jeśli zdający zapisuje kolejno:

$$3^{n+2} - 2^{n+2} + 3^n - 2^n = 10x$$
$$3^n\left(3^2+1\right) - 2^n\left(2^2+1\right) = 10x$$
$$10\cdot 3^n - 5\cdot 2^n = 10x,$$
$$5\left(2\cdot 3^n - 2^n\right) = 10x$$
$$2\cdot 3^n - 2^n = 2x$$

i **uzasadnia**, że $2\cdot 3^n - 2^n$ jest liczbą podzielną przez 2, to otrzymuje **2 punkty**.

Zadanie 28. ***(2 pkt)***

Tabela przedstawia wyniki uzyskane na sprawdzianie przez uczniów klasy III.

Oceny	6	5	4	3	2	1
Liczba uczniów	1	2	6	5	4	2

Oblicz medianę i średnią arytmetyczną uzyskanych ocen.

Rozwiązanie

Obliczamy średnią arytmetyczną ocen uzyskanych przez uczniów klasy III

$$\frac{6\cdot 1+5\cdot 2+4\cdot 6+3\cdot 5+2\cdot 4+1\cdot 2}{20} = \frac{65}{20} = 3,25.$$

Mediana 20 uzyskanych ocen to średnia arytmetyczna dziesiątego i jedenastego wyrazu uporządkowanego w kolejności niemalejącej ciągu ocen. Dziesiąty i jedenasty wyraz tego ciągu to 3, zatem mediana jest równa 3.

Schemat oceniania

Zdający otrzymuje ....1 pkt

gdy

- obliczy średnią arytmetyczną ocen uzyskanych przez uczniów klasy III i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy,

albo

- obliczy medianę uzyskanych ocen i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

Zdający otrzymuje ....2 pkt

gdy obliczy średnią arytmetyczną i medianę uzyskanych ocen: odpowiednio $3,25$ i 3.

Zadanie 29. ***(2 pkt)***
Rzucamy dwa razy symetryczną sześcienną kostką do gry. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia A polegającego na tym, że liczba oczek w pierwszym rzucie jest o 1 mniejsza od liczby oczek w drugim rzucie.

I sposób rozwiązania

Ω jest zbiorem wszystkich par (a,b) takich, że $a,b \in \{1,2,3,4,5,6\}$. Mamy model klasyczny, w którym $|\Omega| = 36$.

Zdarzeniu A sprzyjają następujące zdarzenia elementarne:
$(1,2),(2,3),(3,4),(4,5),(5,6)$

Zatem $|A| = 5$ i stąd $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{5}{36}$

Schemat oceniania I sposobu rozwiązania

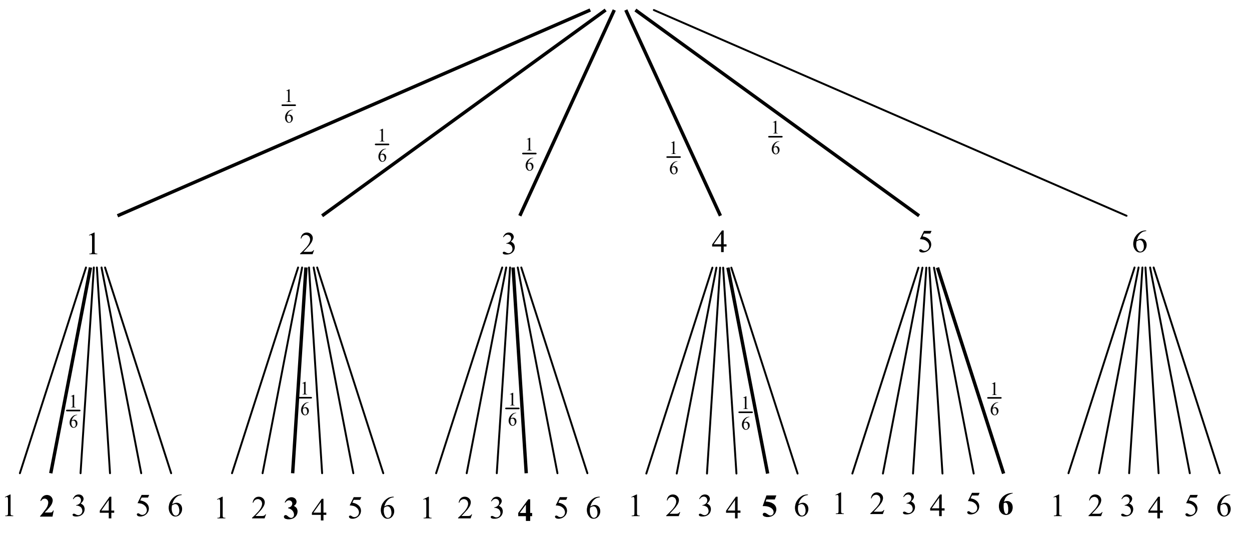
Zdający otrzymuje.. 1 pkt

gdy zapisze, że $|\Omega| = 36$ i $A = \{(1,2),(2,3),(3,4),(4,5),(5,6)\}$

Zdający otrzymuje .... 2 pkt

gdy obliczy prawdopodobieństwa zdarzenia A: $P(A) = \frac{5}{36}$.

II sposób rozwiązania: metoda drzewa
Rysujemy drzewo i pogrubiamy istotne dla rozwiązania zadania gałęzie tego drzewa. Zapisujemy prawdopodobieństwa tylko na tych gałęziach.



Obliczamy prawdopodobieństwo zdarzenia A: $P(A) = 5 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{36}$

Schemat oceniania II sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje.. 1 pkt

gdy

- narysuje drzewo, zapisze prawdopodobieństwa na jego gałęziach i wskaże na drzewie właściwe gałęzie (np. pogrubienie gałęzi lub zapisanie prawdopodobieństw <u>tylko na istotnych gałęziach</u>)

albo

- narysuje drzewo, zapisze prawdopodobieństwa na jego gałęziach i nie wskazuje na drzewie odpowiednich gałęzi, ale z dalszych obliczeń można wywnioskować, że wybiera właściwe gałęzie

Zdający otrzymuje ....2 pkt

gdy obliczy prawdopodobieństwa zdarzenia A: $P(A)=\frac{5}{36}$.

<u>**III sposób rozwiązania:**</u> metoda tabeli
Rysujemy tabelą i wybieramy zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniu A.

II kostka

I kostka	1	2	3	4	5	6
1		X				
2			X			
3				X		
4					X	
5						X
6						

$|\Omega|=36$ i $|A|=5$, zatem $P(A)=\frac{5}{36}$.

<u>**Schemat oceniania III sposobu rozwiązania**</u>

Zdający otrzymuje ....1 pkt

gdy narysuje tabelę i wypisze wszystkie zdarzenia sprzyjające lub zaznaczy je w tabeli.

Zdający otrzymuje ....2 pkt

gdy poda poprawną odpowiedź: $P(A)=\frac{5}{36}$.

<u>**Uwaga**</u>
Jeżeli zdający popełnił błąd przy zliczaniu par spełniających warunki zadania i konsekwentnie do popełnionego błędu obliczy prawdopodobieństwo, to przyznajemy **1 punkt**.

Zadanie 30. ***(2 pkt)***
Liczby $27, x, 3$ są odpowiednio pierwszym, drugim i trzecim wyrazem malejącego ciągu geometrycznego. Oblicz ósmy wyraz tego ciągu.

I sposób rozwiązania

Korzystając ze wzoru na trzeci wyraz ciągu geometrycznego obliczamy q iloraz ciągu:

$3 = 27 \cdot q^2$

$q^2 = \frac{1}{9}$

$q = -\frac{1}{3}$ lub $q = \frac{1}{3}$.

Ponieważ ciąg jest malejący, to $q = \frac{1}{3}$.

Obliczamy kolejne wyrazy ciągu: $27, 9, 3, 1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}$, zatem ósmy wyraz ciągu jest równy $\frac{1}{81}$.

II sposób rozwiązania

Z własności ciągu geometrycznego wynika, że $x^2 = 27 \cdot 3$. Stąd $x^2 = 81$, czyli $x = 9$ lub $x = -9$. Ponieważ ciąg jest malejący, to $x = 9$, a iloraz tego ciągu q jest równy $\frac{1}{3}$.

Obliczamy kolejne wyrazy ciągu: $27, 9, 3, 1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}$, zatem ósmy wyraz ciągu jest równy $\frac{1}{81}$.

Uwaga

Zdający może obliczyć ósmy wyraz ciągu korzystając ze wzoru: $27 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^7 = \frac{3^3}{3^7} = \frac{1}{3^4} = \frac{1}{81}$.

Schemat oceniania I i II sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje .... 1 pkt

gdy obliczy q iloraz ciągu: $q = \frac{1}{3}$.

Zdający otrzymuje .... 2 pkt

gdy obliczy ósmy wyraz ciągu: $\frac{1}{81}$.

Zadanie 31. (*4 pkt*)
Oblicz sumę wszystkich liczb trzycyfrowych zapisanych wyłącznie za pomocą cyfr $1,2,3,4$ (cyfry mogą się powtarzać).

<u>I sposób rozwiązania</u> (wypisanie wszystkich liczb**):**
Zauważamy, że istnieją 64 liczby trzycyfrowe, których cyfry wybrane są ze zbioru $\{1,2,3,4\}$**.**
Pierwszą cyfrę możemy wybrać na 4 sposoby spośród cyfr 1, 2, 3 i 4, drugą również na 4 sposoby (cyfry mogą się powtarzać) i trzecią także na 4 sposoby.
Wypisujemy wszystkie liczby spełniające warunki zadania i dodajemy je, np.:

$$111+112+113+114+121+122+123+124+$$
$$+131+132+133+134+141+142+143+144=2040$$

$$211+212+213+214+221+222+223+224+$$
$$+231+232+233+234+241+242+243+244=3640$$

$$311+312+313+314+321+322+323+324+$$
$$+331+332+333+334+341+342+343+344=5240$$

$$411+412+413+414+421+422+423+424+$$
$$+431+432+433+434+441+442+443+444=6840$$

Suma wszystkich liczb jest równa: $2040+3640+5240+6840=17760$.

<u>Uwaga</u>
Sumę 64 liczb trzycyfrowych spełniających warunki zadania możemy obliczyć zauważając, że we wszystkich dodawaniach zmieniają się tylko sumy setek:

$$16\cdot 100+(11+12+13+14+21+22+23+24+$$
$$+31+32+33+34+41+42+43+44)=1600+440=2040$$

$$16\cdot 200+(11+12+13+14+21+22+23+24+$$
$$+31+32+33+34+41+42+43+44)=3200+440=3640$$

$$16\cdot 300+(11+12+13+14+21+22+23+24+$$
$$+31+32+33+34+41+42+43+44)=4800+440=5240$$

$$16\cdot 400+(11+12+13+14+21+22+23+24+$$
$$+31+32+33+34+41+42+43+44)=6400+440=6840$$

Suma wszystkich liczb jest równa: $2040+3640+5240+6840=17760$.

<u>II sposób rozwiązania</u>
Zauważamy, że istnieją 64 liczby trzycyfrowe, których cyfry wybrane są ze zbioru $\{1,2,3,4\}$ (przy czym cyfry mogą się powtarzać).

Każdą z tych liczb można zapisać w postaci $a \cdot 100 + b \cdot 10 + c$, gdzie *a*, *b*, *c* to cyfry wybrane ze zbioru liczb $\{1,2,3,4\}$. Sumę tych 64 liczb obliczamy dodając oddzielnie wielokrotności 100, oddzielnie wielokrotności 10 i oddzielnie cyfry jedności.
Obliczamy, ile razy jedynka występuje jako cyfra setek. Cyfrą dziesiątek może wówczas być jedna z 4 cyfr spośród $1, 2, 3$, 4 i cyfrą jedności też jedna z tych 4 cyfr. Zatem jedynka jako cyfra setek występuje w 16 liczbach. W sumie 64 liczb spełniających warunki zadania. składnik 100 wystąpi 16 razy. Podobnie 16 razy wystąpi składnik 200, 16 razy wystąpi składnik 300 i 16 razy składnik 400. Zatem składniki postaci $a \cdot 100$ dają sumę

$16 \cdot 100 + 16 \cdot 200 + 16 \cdot 300 + 16 \cdot 400 = 16 \cdot 100 \cdot (1 + 2 + 3 + 4) = 16000$.

Tak samo pokazujemy, że każda cyfra spośród $1, 2, 3$,4 wystąpi 16 razy jako cyfra dziesiątek.
Zatem składniki postaci $b \cdot 10$ dają sumę
$16 \cdot 10 + 16 \cdot 20 + 16 \cdot 30 + 16 \cdot 40 = 16 \cdot 10 \cdot (1 + 2 + 3 + 4) = 1600$.
Postępując analogicznie obliczamy sumę cyfr jedności:
$16 \cdot 1 + 16 \cdot 2 + 16 \cdot 3 + 16 \cdot 4 = 16 \cdot (1 + 2 + 3 + 4) = 160$.
Suma wszystkich 64 liczb jest zatem równa $16000 + 1600 + 160 = 17760$.

<u>**Schemat oceniania**</u>

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 1 pkt
Zapisanie, że istnieją 64 liczby trzycyfrowe zapisane wyłącznie za pomocą cyfr 1, 2, 3 i 4 (przy czym cyfry mogą się powtarzać).

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 2 pkt
- wypisanie wszystkich liczb trzycyfrowych, które można zapisać wyłącznie za pomocą cyfr $1, 2, 3$ i 4 (przy czym cyfry mogą się powtarzać).

albo
- zapisanie sum „setek”, „dziesiątek” i „jedności”.

<u>Uwaga</u>
Jeżeli zdający wypisze liczby spełniające warunki zadania z pominięciem co najwyżej trzech liczb i nie obliczy ich sumy albo zapisze sumy „setek” lub „dziesiątek” lub „jedności” z jednym błędem rachunkowym i nie obliczy ich sumy, to za takie rozwiązanie przyznajemy **2 punkty**.

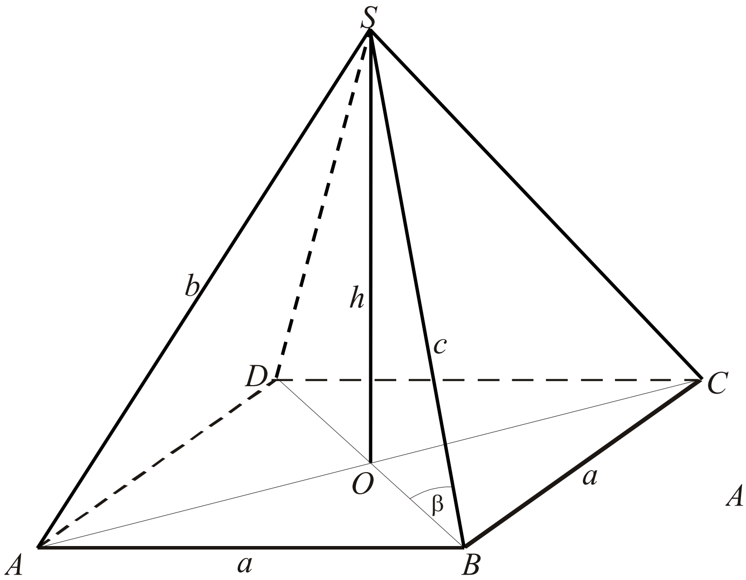
Rozwiązanie zadania do końca lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) .... 3 pkt
- wypisanie liczb spełniających warunki zadania z pominięciem co najwyżej trzech liczb i obliczenie ich sumy

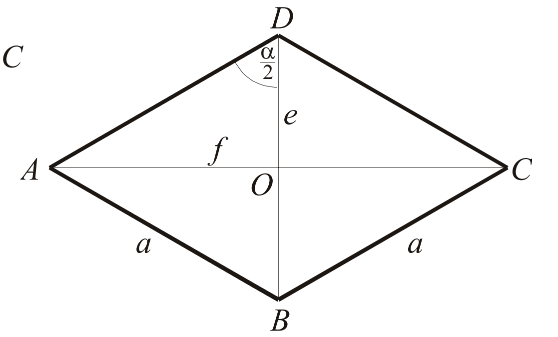
albo
- zapisanie sumy „setek” lub „dziesiątek” lub „jedności” z jednym błędem rachunkowym i obliczenie ich sumy.

Rozwiązanie bezbłędne .... 4 pkt
Obliczenie sumy wszystkich liczb trzycyfrowych zapisanych wyłącznie za pomocą cyfr $1, 2, 3$,4 (przy czym cyfry mogą się powtarzać): 17760.

Zadanie 32. (*4 pkt*)
Podstawą ostrosłupa $ABCDS$ jest romb $ABCD$ o boku długości 4. Kąt ABC rombu ma miarę $120°$ oraz $|AS|=|CS|=10$ i $|BS|=|DS|$. Oblicz sinus kąta nachylenia krawędzi BS do płaszczyzny podstawy ostrosłupa.

<u>I sposób rozwiązania</u>





Wprowadźmy oznaczenia:
a – długość boku rombu,
e, f – długości przekątnych rombu,
h – wysokość ostrosłupa,
$b=|AS|=|CS|$,
$c=|BS|=|DS|$.
Obliczamy długości przekątnych podstawy.
Z własności trójkąta równobocznego BCD mamy:

$$e=|BD|=a \text{ i } f=2\cdot|OC|=2\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2},$$

zatem $e=4$, $f=4\sqrt{3}$
Korzystając z twierdzenia Pitagorasa w trójkącie AOS obliczamy wysokość ostrosłupa:

$$h^2=b^2-\left(\frac{f}{2}\right)^2$$

$$h^2=10^2-\left(2\sqrt{3}\right)^2=88,$$

$$h=\sqrt{88}=2\sqrt{22}$$

Obliczamy długość krótszej krawędzi bocznej BS:

$$c=\sqrt{h^2+\left(\frac{e}{2}\right)^2}$$

$$c=\sqrt{88+4}=\sqrt{92}=2\sqrt{23}$$

Obliczamy sinus kąta nachylenia krawędzi bocznej *BS* ostrosłupa do płaszczyzny podstawy:

$$\sin\beta=\frac{h}{c}$$

$$\sin\beta=\frac{2\sqrt{22}}{2\sqrt{23}}=\sqrt{\frac{22}{23}}=\frac{\sqrt{506}}{23}$$

$$\sin\beta\approx 0,9780.$$

<u>Schemat oceniania</u>

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania .... 1 pkt

Obliczenie długości przekątnych podstawy ostrosłupa: $e=4$ i $f=4\sqrt{3}$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 pkt

Obliczenie wysokości ostrosłupa $h=2\sqrt{22}$.

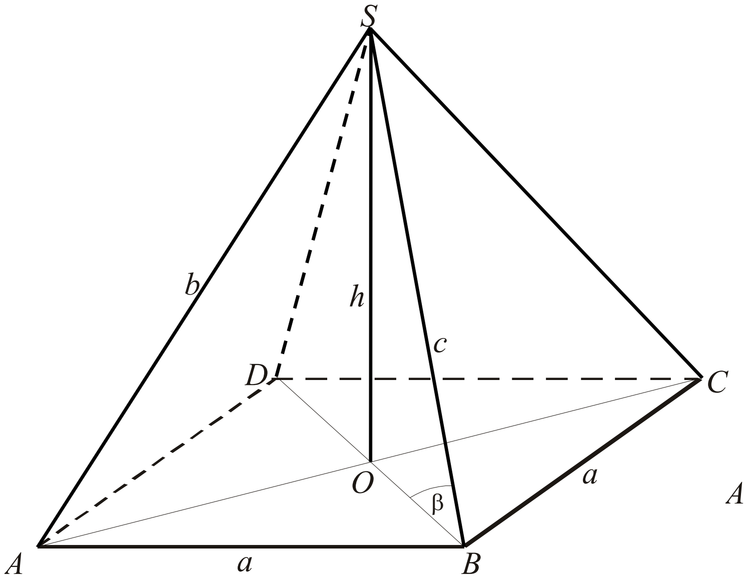
Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 pkt

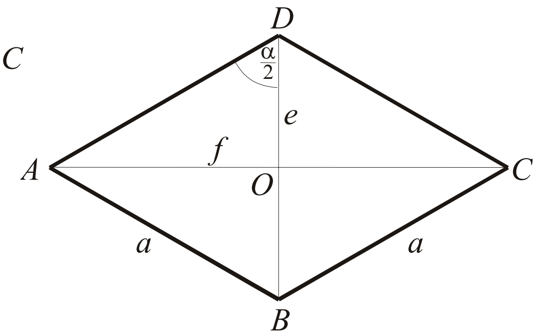
Obliczenie długości krótszej krawędzi bocznej ostrosłupa: $c=2\sqrt{23}$.

Rozwiązanie pełne .... 4 pkt

Obliczenie $\sin\beta=\sqrt{\frac{22}{23}}$.

II sposób rozwiązania





Wprowadźmy oznaczenia:
a – długość boku rombu,
e, f – długości przekątnych rombu,
h – wysokość ostrosłupa,
$b = |AS| = |CS|$,
$c = |BS| = |DS|$.
Obliczamy długości przekątnych podstawy.
Z własności trójkąta równobocznego BCD mamy:
$e = |BD| = a$ i $f = 2 \cdot |OC| = 2 \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}$,
zatem $e = 4$, $f = 4\sqrt{3}$
Korzystając z twierdzenia Pitagorasa w trójkącie AOS obliczamy wysokość ostrosłupa:

$$h^2 = b^2 - \left(\frac{f}{2}\right)^2$$

$$h^2 = 10^2 - \left(2\sqrt{3}\right)^2 = 88,$$

$$h = \sqrt{88} = 2\sqrt{22}$$

Obliczamy tangens kąta nachylenia krótszej krawędzi bocznej ostrosłupa do płaszczyzny podstawy:

$$\mathrm{tg}\beta = \frac{h}{\frac{e}{2}}$$

$\mathrm{tg}\beta = \sqrt{22}$.

Obliczamy $\sin\beta$ korzystając z tożsamości trygonometrycznych:

$$\mathrm{tg}\beta = \frac{\sin\beta}{\cos\beta} = \frac{\sin\beta}{\sqrt{1-\sin^2\beta}}$$

$$\sqrt{22} = \frac{\sin\beta}{\sqrt{1-\sin^2\beta}}$$

$$22 = \frac{\sin^2\beta}{1-\sin^2\beta}$$

Zatem $\sin\beta = \sqrt{\frac{22}{23}}$.

Uwaga

Jeżeli zdający korzystając z przybliżonej wartości tangensa kąta β ($\mathrm{tg}\beta = \sqrt{22} \approx 4,6904$) odczyta miarę kąta $\beta \approx 78°$ i następnie zapisze $\sin\beta \approx \sin 78° \approx 0,9781$, to za takie rozwiązanie otrzymuje **4 punkty**.

Schemat oceniania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania .... 1 pkt

Obliczenie długości przekątnych podstawy ostrosłupa: $e = 4$ i $f = 4\sqrt{3}$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 pkt

Obliczenie wysokości ostrosłupa: $h = 2\sqrt{22}$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 pkt

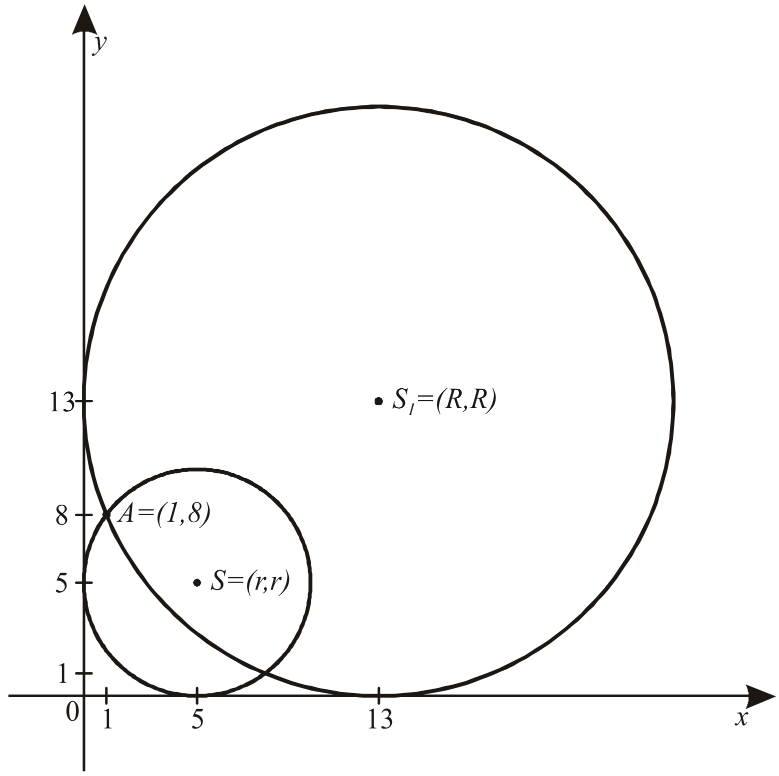
Obliczenie tangensa kąta nachylenia krótszej krawędzi bocznej ostrosłupa do płaszczyzny podstawy $\mathrm{tg}\beta = \sqrt{22}$.

Rozwiązanie pełne .... 4 pkt

Obliczenie $\sin\beta = \sqrt{\frac{22}{23}}$ albo $\sin\beta \approx \sin 78° \approx 0,9781$.

Zadanie 33. (*4 pkt*)
Wyznacz równanie okręgu przechodzącego przez punkt $A=(1,\,8)$ i stycznego do obu osi układu współrzędnych. Rozważ wszystkie przypadki.

<u>Rozwiązanie</u>



Ponieważ okrąg jest styczny do obu osi układu współrzędnych i jego środek leży w I ćwiartce układu współrzędnych, więc środek S tego okręgu ma współrzędne $S=(r,r)$, gdzie r jest promieniem tego okręgu. Równanie okręgu ma zatem postać $(x-r)^2+(y-r)^2=r^2$. Punkt $A=(1,\,8)$ leży na tym okręgu, więc $(1-r)^2+(8-r)^2=r^2$. Stąd otrzymujemy $r^2-18r+65=0$. Rozwiązaniami tego równania są liczby: $r=5$, $r=13$. To oznacza, że są dwa okręgi spełniające warunki zadania o równaniach $(x-5)^2+(y-5)^2=25$ i $(x-13)^2+(y-13)^2=169$.

Schemat oceniania

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 1 pkt

Zapisanie współrzędnych środka S szukanego okręgu w zależności od promienia r tego okręgu: $S=(r,r)$ lub zapisanie, że środek okręgu leży na prostej o równaniu $y=x$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 2 pkt

Zapisanie równania kwadratowego z jedną niewiadomą:
$(1-r)^2+(8-r)^2=r^2$ czyli $r^2-18r+65=0$.

Rozwiązanie zadania do końca lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) .... 3 pkt

Zadanie rozwiązane do końca, ale w trakcie rozwiązania popełniano błędy rachunkowe.

Rozwiązanie pełne .... 4 pkt

Zapisanie równań obu okręgów:
w postaci kanonicznej: $(x-5)^2+(y-5)^2=25$ i $(x-13)^2+(y-13)^2=169$
lub w postaci ogólnej: $x^2+y^2-10x-10y+25=0$ i $x^2+y^2-26x-26y+169=0$.

Uwagi

1. Jeżeli zdający zapisze równanie jednego okręgu, to otrzymuje **1 punkt**.
2. Jeżeli zdający zapisze równania obu okręgów, to otrzymuje **2 punkty**.
3. Jeżeli zdający zapisze równania obu okręgów i stwierdzi, że nie ma innych okręgów spełniających warunki zadania, to otrzymuje **4 punkty**.