Klucz odpowiedzi do zadań zamkniętych
oraz
schemat oceniania

sierpień 2013

Poziom Podstawowy

Klucz punktowania zadań zamkniętych

Nr zadania	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
Odpowiedź	D	A	B	D	C	B	B	C	C	B	A	C	D	D	C	B	C	A	D	D	C	B	D	B	B

Zadanie 26. (*2 pkt*)

Rozwiąż nierówność $3x - x^2 \geq 0$.

<u>Rozwiązanie</u>

Rozwiązanie nierówności kwadratowej składa się z dwóch etapów.

Pierwszy etap rozwiązania:

Znajdujemy pierwiastki trójmianu kwadratowego $-x^2 + 3x$:

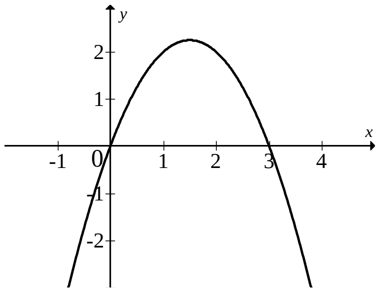
- podajemy je bezpośrednio, np. zapisując pierwiastki trójmianu lub postać iloczynową trójmianu lub zaznaczając na wykresie
  $x_1 = 3$, $x_2 = 0$ lub $-x(x-3)$

albo

- obliczamy wyróżnik tego trójmianu:
  $\Delta = 9 - 4 \cdot (-1) \cdot 0 = 9$. Stąd $x_1 = \dfrac{-3-3}{-2} = 3$ oraz $x_2 = \dfrac{-3+3}{-2} = 0$.

Drugi etap rozwiązania:

Podajemy zbiór rozwiązań nierówności: $0 \leq x \leq 3$ lub $\langle 0, 3\rangle$ lub $x \in \langle 0, 3\rangle$ np. odczytując go ze szkicu wykresu funkcji $f(x) = -x^2 + 3x$.



<u>Schemat oceniania</u>

Zdający otrzymuje ....1 pkt

gdy:

- zrealizuje pierwszy etap rozwiązania i na tym poprzestanie lub błędnie zapisze zbiór rozwiązań nierówności, np.
  - rozłoży trójmian kwadratowy na czynniki liniowe, np. $-x(x-3)$ i na tym poprzestanie lub błędnie zapisze zbiór rozwiązań nierówności,
  - obliczy lub poda pierwiastki trójmianu kwadratowego $x_1 = 3$, $x_2 = 0$ i na tym poprzestanie lub błędnie zapisze zbiór rozwiązań nierówności,
  - zaznaczy na wykresie miejsca zerowe funkcji $f(x) = -x^2 + 3x$ i na tym poprzestanie lub błędnie zapisze zbiór rozwiązań nierówności,

albo

- realizując pierwszy etap popełni błąd (ale otrzyma dwa różne pierwiastki) i konsekwentnie do tego rozwiąże nierówność, np. popełni błąd rachunkowy przy obliczaniu wyróżnika lub pierwiastków trójmianu kwadratowego i konsekwentnie do popełnionego błędu rozwiąże nierówność.

Zdający otrzymuje ....2 pkt

gdy:

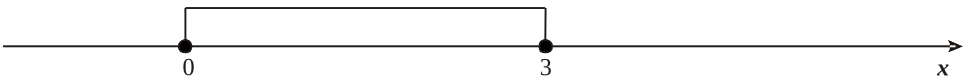
- poda zbiór rozwiązań nierówności : $\langle 0, 3\rangle$ lub $x \in \langle 0, 3\rangle$ lub $x \geq 0$ i $x \leq 3$

albo

- sporządzi ilustrację geometryczną (oś liczbowa, wykres) i zapisze zbiór rozwiązań nierówności w postaci: $x \geq 0,\ x \leq 3$

albo

- poda zbiór rozwiązań nierówności w postaci graficznej z poprawnie zaznaczonymi końcami przedziałów.



<u>Kryteria</u>
<u>oceniania uwzględniające specyficzne trudności w uczeniu się matematyki</u>

1. Akceptujemy sytuację, gdy zdający poprawnie obliczy pierwiastki trójmianu $x_1 = 0$, $x_2 = 3$ i zapisze, np. $x \in \langle 0, -3\rangle$, popełniając tym samym błąd przy przepisywaniu jednego z pierwiastków. Za takie rozwiązanie otrzymuje **2 punkty**.
2. Jeśli zdający pomyli porządek liczb na osi liczbowej, np. zapisze zbiór rozwiązań nierówności w postaci $x \in \langle 3, 0\rangle$, to otrzymuje **2 punkty**.

Zadanie 27. *(2 pkt)*

Rozwiąż równanie $x^3 - 6x^2 - 12x + 72 = 0$.

<u>I sposób rozwiązania</u> (metoda grupowania)

Przedstawiamy lewą stronę równania w postaci iloczynowej stosując metodę grupowania wyrazów:

$x\ \ x^2 - 12\ \ - 6\ \ x^2 - 12\ \ = 0$ lub $x^2\ \ x - 6\ \ - 12\ \ x - 6\ \ = 0$

$x - 6\ \ \ x^2 - 12\ \ = 0$.

Stąd $x = 6$ lub $x = -\sqrt{12} = -2\sqrt{3}$ lub $x = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$.

<u>Schemat oceniania I sposobu rozwiązania</u>

Zdający otrzymuje ....1 pkt

gdy zapisze lewa stronę równania w postaci iloczynu, np. $x - 6\ \ \ x^2 - 12$,

$x - 6\ \ \ x - \sqrt{12}\ \ \ x + \sqrt{12}$, przy czym postać ta musi być otrzymana w sposób poprawny, i na tym poprzestanie lub dalej popełni błędy.

Zdający otrzymuje ....2 pkt
gdy wyznaczy bezbłędnie wszystkie rozwiązania równania: $x=6$ lub $x=-\sqrt{12}$ lub $x=\sqrt{12}$.

<u>II sposób rozwiązania</u> (metoda dzielenia)
Stwierdzamy, że liczba 6 jest pierwiastkiem wielomianu $x^3-6x^2-12x+72$. Dzielimy wielomian $x^3-6x^2-12x+72$ przez dwumian $x-6$. Otrzymujemy iloraz x^2-12.

Zapisujemy równanie w postaci $x-6 \quad x^2-12 \;=0$. Stąd $x-6 \quad x-\sqrt{12} \quad x+\sqrt{12} \;=0$.

Zatem $x=6$ lub $x=-\sqrt{12}$ lub $x=\sqrt{12}$.

<u>Schemat oceniania II sposobu rozwiązania</u>

Zdający otrzymuje ....1 pkt
gdy podzieli wielomian $x^3-6x^2-12x+72$ przez dwumian $x-6$, otrzyma iloraz x^2-12 i na tym poprzestanie lub dalej popełni błędy.

Zdający otrzymuje ....2 pkt
gdy wyznaczy bezbłędnie wszystkie rozwiązania równania: $x=6$ lub $x=-\sqrt{12}$ lub $x=\sqrt{12}$
.

Zadanie 28. (*2 pkt*)

Kąt α jest ostry i $\mathrm{tg}\alpha=2$. Oblicz $\dfrac{\sin\alpha-\cos\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}$.

<u>I sposób rozwiązania</u>

Dzieląc licznik i mianownik ułamka $\dfrac{\sin\alpha-\cos\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}$ przez $\cos\alpha$ i wykorzystując zależność

$$\mathrm{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \text{ otrzymujemy } \frac{\sin\alpha-\cos\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}=\frac{\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}-\dfrac{\cos\alpha}{\cos\alpha}}{\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\dfrac{\cos\alpha}{\cos\alpha}}=\frac{\mathrm{tg}\alpha-1}{\mathrm{tg}\alpha+1}=\frac{2-1}{2+1}=\frac{1}{3}.$$

<u>II sposób rozwiązania</u>

Wykorzystując zależność $\mathrm{tg}\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ zapisujemy $\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=2$.

Przekształcamy $\sin\alpha=2\cos\alpha$, podstawiamy do wyrażenia $\dfrac{\sin\alpha-\cos\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}$ i obliczamy jego wartość:

$$\frac{\sin\alpha-\cos\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}=\frac{2\cos\alpha-\cos\alpha}{2\cos\alpha+\cos\alpha}=\frac{\cos\alpha}{3\cos\alpha}=\frac{1}{3}.$$

III sposób rozwiązania

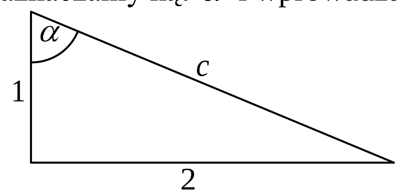
Wykorzystując zależność $\mathrm{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ zapisujemy $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = 2$.

Przekształcamy $\cos\alpha = \frac{\sin\alpha}{2}$, podstawiamy do wyrażenia $\frac{\sin\alpha - \cos\alpha}{\sin\alpha + \cos\alpha}$ i obliczamy jego wartość:

$$\frac{\sin\alpha - \cos\alpha}{\sin\alpha + \cos\alpha} = \frac{\sin\alpha - \frac{\sin\alpha}{2}}{\sin\alpha + \frac{\sin\alpha}{2}} = \frac{\frac{2\sin\alpha - \sin\alpha}{2}}{\frac{2\sin\alpha + \sin\alpha}{2}} = \frac{2\sin\alpha - \sin\alpha}{2} \cdot \frac{2}{2\sin\alpha + \sin\alpha} = \frac{\sin\alpha}{3\sin\alpha} = \frac{1}{3}.$$

IV sposób rozwiązania

Rysujemy trójkąt prostokątny, zaznaczamy kąt α i wprowadzamy oznaczenia.



Z twierdzenia Pitagorasa otrzymujemy $1^2 + 2^2 = c^2$. Stąd $c = \sqrt{5}$.

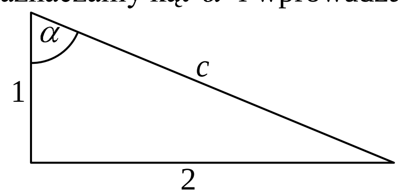
Zatem $\sin\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$ i $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

Wartość wyrażenia $\frac{\sin\alpha - \cos\alpha}{\sin\alpha + \cos\alpha}$ jest więc równa

$$\frac{\sin\alpha - \cos\alpha}{\sin\alpha + \cos\alpha} = \frac{\frac{2}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{5}}}{\frac{2}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{5}}}{\frac{3}{\sqrt{5}}} = \frac{1}{3}.$$

V sposób rozwiązania

Rysujemy trójkąt prostokątny, zaznaczamy kąt α i wprowadzamy oznaczenia.



Korzystając z definicji funkcji trygonometrycznych kąta ostrego w trójkącie prostokątnym, zapisujemy

$$\sin\alpha = \frac{2}{c},\ \cos\alpha = \frac{1}{c}.$$

Podstawiając $\sin\alpha$ i $\cos\alpha$, obliczamy wartość wyrażenia $\frac{\sin\alpha - \cos\alpha}{\sin\alpha + \cos\alpha}$:

$$\frac{\sin\alpha - \cos\alpha}{\sin\alpha + \cos\alpha} = \frac{\frac{2}{c} - \frac{1}{c}}{\frac{2}{c} + \frac{1}{c}} = \frac{\frac{2-1}{c}}{\frac{2+1}{c}} = \frac{1}{3}.$$

Schemat oceniania I, II, III, IV i V sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje ……………………………………………………………………1 pkt

gdy

- podzieli licznik i mianownik ułamka $\frac{\sin\alpha-\cos\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}$ przez $\cos\alpha$, zapisze ten ułamek w postaci $\frac{\mathrm{tg}\alpha-1}{\mathrm{tg}\alpha+1}$ i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy

albo

- zapisze zależność $\sin\alpha=2\cos\alpha$, doprowadzi ułamek do postaci $\frac{2\cos\alpha-\cos\alpha}{2\cos\alpha+\cos\alpha}$ i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy

albo

- zapisze zależność $\cos\alpha=\frac{\sin\alpha}{2}$, doprowadzi ułamek do postaci $\frac{\sin\alpha-\frac{\sin\alpha}{2}}{\sin\alpha+\frac{\sin\alpha}{2}}$ i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy

albo

- obliczy długość przeciwprostokątnej trójkąta prostokątnego o przyprostokątnych długości 1 i 2 (nawet z błędem rachunkowym) oraz zapisze $\sin\alpha=\frac{2}{c}$ i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy

albo

- obliczy długość przeciwprostokątnej trójkąta prostokątnego o przyprostokątnych długości 1 i 2 (nawet z błędem rachunkowym) oraz zapisze $\cos\alpha=\frac{1}{c}$ i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy

albo

- narysuje trójkąt prostokątny o przyprostokątnych długości 1 i 2, oznaczy długość przeciwprostokątnej, zaznaczy w tym trójkącie poprawnie kąt α i zapisze $\sin\alpha=\frac{2}{c}$ lub $\cos\alpha=\frac{1}{c}$, i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

Zdający otrzymuje ……………………………………………………………………2 pkt

gdy poprawnie obliczy wartość wyrażenia $\frac{\sin\alpha-\cos\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}$: $\frac{1}{3}$.

Uwagi

1. Jeśli zdający przyjmie, że $\sin\alpha=2$ i $\cos\alpha=1$, to otrzymuje **0 punktów**.
2. Wszystkie rozwiązania, w których zdający błędnie zaznaczy kąt α na przedstawionym przez siebie rysunku i z tego korzysta oceniamy na **0 punktów**.
3. Jeśli zdający odczyta z tablic wartość kąta, dla którego $\mathrm{tg}\alpha=2$: $\alpha=63^\circ$ oraz zapisze $\sin 63^\circ=0,8910$ lub $\cos 63^\circ=0,4540$ i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy, to otrzymuje **1 punkt**.

4. Jeśli zdający odczyta z tablic wartość kąta, dla którego $\mathrm{tg}\alpha = 2$: $\alpha = 63^\circ$ oraz zapisze $\sin 63^\circ = 0,8910$ lub $\cos 63^\circ = 0,4540$ i obliczy wartość wyrażenia $\frac{\sin\alpha - \cos\alpha}{\sin\alpha + \cos\alpha} \approx 0,3249$, to otrzymuje **2 punkty**.
5. Jeśli zdający odczyta z tablic wartość kąta, dla którego $\mathrm{tg}\alpha = 2$: $\alpha = 64^\circ$ oraz zapisze $\sin 64^\circ = 0,8988$ lub $\cos 64^\circ = 0,4384$ i obliczy wartość wyrażenia $\frac{\sin\alpha - \cos\alpha}{\sin\alpha + \cos\alpha} \approx 0,3443$, to otrzymuje **2 punkty**.

Zadanie 29. (*2 pkt*)
W tabeli zestawiono oceny z matematyki uczniów klasy 3A na koniec semestru.

Ocena	1	2	3	4	5	6
Liczba ocen	0	4	9	13	x	1

Średnia arytmetyczna tych ocen jest równa 3,6. Oblicz liczbę x ocen bardzo dobrych (5) z matematyki wystawionych na koniec semestru w tej klasie.

<u>Rozwiązanie:</u>
Obliczamy średnią arytmetyczną ocen zestawionych w tabeli
$$\frac{0\cdot 1+4\cdot 2+9\cdot 3+13\cdot 4+x\cdot 5+1\cdot 6}{0+4+9+13+x+1}.$$
Ponieważ ta średnia arytmetyczna jest równa 3,6. Zatem otrzymujemy równanie
$$\frac{0\cdot 1+4\cdot 2+9\cdot 3+13\cdot 4+x\cdot 5+1\cdot 6}{0+4+9+13+x+1} = 3,6.$$
Stąd otrzymujemy
$$\frac{5x+93}{x+27} = \frac{18}{5}$$
$$5\ 5x+93\ = 18\ x+27\ ,$$
$$25x+465 = 18x+486,$$
$$7x = 21,$$
$$x = 3.$$

<u>Schemat oceniania</u>
Zdający otrzymuje ....1 pkt
gdy:

- zapisze równanie pozwalające obliczyć liczbę ocen bardzo dobrych i na tym poprzestanie lub dalej popełni błąd, np.:
$$\frac{0\cdot 1+4\cdot 2+9\cdot 3+13\cdot 4+x\cdot 5+1\cdot 6}{0+4+9+13+x+1} = 3,6 \text{ lub } \frac{4\cdot 2+9\cdot 3+13\cdot 4+x\cdot 5+1\cdot 6}{0+4+9+13+x+1} = 3,6$$

albo

- zapisze równanie pozwalające obliczyć liczbę ocen bardzo dobrych, ale popełni błąd przy przepisywaniu danych.

Zdający otrzymuje ....2 pkt
gdy obliczy liczbę ocen bardzo dobrych: 3.

Uwaga

1. Jeśli zdający odgadnie, że liczba ocen bardzo dobrych jest równa 3, i sprawdzi to, wykonując odpowiednie obliczenia, to otrzymuje **2 punkty**.

Kryteria oceniania uwzględniające specyficzne trudności w uczeniu się matematyki

Jeżeli zdający popełni błąd nieuwagi zapisując średnią arytmetyczną ocen, np. ; $\frac{0\cdot 1+9\cdot 2+9\cdot 3+13\cdot 4+x\cdot 5+1\cdot 6}{0+4+9+13+x+1}$, rozwiąże równanie i otrzyma wynik, który jest liczbą całkowitą, to otrzymuje **2 punkty**, jeśli otrzyma wynik, który nie jest liczbą całkowitą lub popełni błąd rachunkowy przy rozwiązywaniu równania, to otrzymuje **1 punkt.**

Zadanie 30. *(2 pkt)*

Uzasadnij, że jeżeli a jest liczbą rzeczywistą różna od zera i $a+\frac{1}{a}=3$ to $a^2+\frac{1}{a^2}=7$.

I sposób rozwiązania

Równość $a+\frac{1}{a}=3$ podnosimy obustronnie do kwadratu i przekształcamy równoważnie

$$a^2+2\cdot a\cdot\frac{1}{a}+\frac{1}{a^2}=9,$$

$$a^2+\frac{1}{a^2}=9-2.$$

Stąd $a^2+\frac{1}{a^2}=7$.

Schemat oceniania I sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje ....1 pkt

gdy podniesie równość obustronnie do kwadratu: $a+\frac{1}{a}=3$ i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Zdający otrzymuje ....2 pkt

gdy obliczy wartość wyrażenia $a^2+\frac{1}{a^2}:\ 7$.

II sposób rozwiązania

Wyrażenie $a^2+\frac{1}{a^2}$ zapisujemy w postaci $a^2+\frac{1}{a^2}=\left(a+\frac{1}{a}\right)^2-2\cdot a\cdot\frac{1}{a}$.

Zatem $a^2+\frac{1}{a^2}=9-2=7$.

Schemat oceniania II sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje ....1 pkt

gdy zapisze zależność między sumą $a^2+\frac{1}{a^2}$, a kwadratem sumy $\left(a+\frac{1}{a}\right)^2$ i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Zdający otrzymuje ....2 pkt

gdy obliczy wartość wyrażenia $a^2+\frac{1}{a^2}:\ 7$.

III sposób rozwiązania

Mnożąc obie strony równania $a+\frac{1}{a}=3$ przez a otrzymujemy równanie

$$a^2+1=3a,$$

$$a^2-3a+1=0.$$

$$\Delta=\ -3\ ^2-4\cdot 1\cdot 1=5,\ \sqrt{\Delta}=\sqrt{5},$$

$$a=\frac{3-\sqrt{5}}{2}\ \text{lub}\ a=\frac{3+\sqrt{5}}{2}.$$

Gdy $a=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$, to $a^2+\frac{1}{a^2}=\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^2+\frac{1}{\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^2}=\frac{7-3\sqrt{5}}{2}+\frac{2}{7-3\sqrt{5}}=$

$=\frac{7-3\sqrt{5}}{2}+\frac{2\ \ 7+3\sqrt{5}}{49-45}=\frac{7-3\sqrt{5}}{2}+\frac{7+3\sqrt{5}}{2}=7$,

Gdy $a=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$, to $a^2+\frac{1}{a^2}=\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^2+\frac{1}{\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^2}=\frac{7+3\sqrt{5}}{2}+\frac{2}{7+3\sqrt{5}}=$

$=\frac{7+3\sqrt{5}}{2}+\frac{2\ \ 7-3\sqrt{5}}{49-45}=\frac{7+3\sqrt{5}}{2}+\frac{7-3\sqrt{5}}{2}=7$.

Schemat oceniania III sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje ....1 pkt

gdy rozwiąże równanie $a+\frac{1}{a}=3$: $a=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ lub $a=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Zdający otrzymuje ....2 pkt

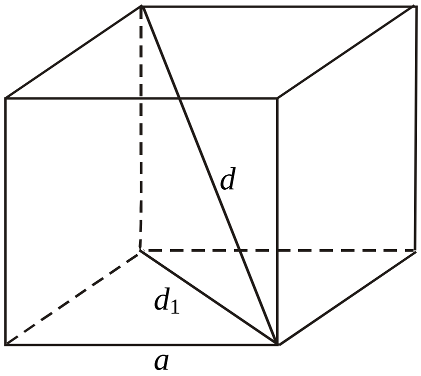
gdy obliczy wartość wyrażenia $a^2+\frac{1}{a^2}:\ 7$.

Zadanie 31. (*2 pkt*)

Długość krawędzi sześcianu jest o 2 krótsza od długości jego przekątnej. Oblicz długość przekątnej tego sześcianu.

<u>Rozwiązanie</u>

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.



Z twierdzenia Pitagorasa otrzymujemy: $a^2 + a^2 = d_1^2$ oraz $a^2 + d_1^2 = d^2$. Stąd $a = \frac{d}{\sqrt{3}}$.

Ponieważ $d = a + 2$, więc otrzymujemy równanie

$$d = \frac{d}{\sqrt{3}} + 2,$$

$$d\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 2.$$

Stąd $d = \frac{2}{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1} = \frac{2\sqrt{3}\ \ \sqrt{3}+1}{3-1} = \sqrt{3}\ \ \sqrt{3}+1\ \ = 3 + \sqrt{3}$.

<u>Uwaga</u>

Możemy też zapisać równanie z inną niewiadomą, np.

$$a\sqrt{3} = a + 2,$$

$$a\ \ \sqrt{3} - 1\ \ = 2,$$

$$a = \sqrt{3} + 1.$$

Stąd $d = a\sqrt{3} =\ \ \sqrt{3}+1\ \ \sqrt{3} = 3 + \sqrt{3}$.

<u>Schemat oceniania rozwiązania</u>

Zdający otrzymuje .... 1 pkt

gdy zapisze równanie pozwalające obliczyć długość przekątnej sześcianu, np.:

$d = \frac{d}{\sqrt{3}} + 2$, $a\sqrt{3} = a + 2$ i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

Zdający otrzymuje .... 2 pkt

gdy obliczy długość przekątnej: $d = \frac{6}{3-\sqrt{3}}$ lub $d = 3 + \sqrt{3}$.

Zadanie 32. *(5 pkt)*

Dane są dwie prostokątne działki. Działka pierwsza ma powierzchnię równą $6000\,\mathrm{m}^2$. Działka druga ma wymiary większe od wymiarów pierwszej działki o $10\,\mathrm{m}$ i $15\,\mathrm{m}$ oraz powierzchnię większą o $2250\,\mathrm{m}^2$. Oblicz wymiary pierwszej działki.

<u>I sposób rozwiązania</u>

Niech x oznacza długość jednego z boków pierwszej działki, a y – długość drugiego boku działki pierwszej, wtedy pole powierzchnia działki pierwszej jest równe $x\cdot y$. Stąd mamy równanie $x\cdot y=6000$.

Wtedy $x+10$ oznacza długość jednego z boków działki drugiej, a $y+15$ długość drugiego boku działki drugiej, zaś pole powierzchni tej działki jest równe $6000+2250=8250$. Otrzymujemy zatem równanie $x+10\ \cdot\ y+15\ =8250$.

Zapisujemy układ równań $\begin{cases} x\cdot y=6000 \\ x+10\ \cdot\ y+15\ =8250 \end{cases}$

Z pierwszego równania wyznaczamy

<table>
<tr><td>$y=\dfrac{6000}{x}$</td><td>$x=\dfrac{6000}{y}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">podstawiamy do drugiego równania i rozwiązujemy</td></tr>
<tr><td>$x+10\ \left(\dfrac{6000}{x}+15\right)=8250$
Przekształcamy to równanie do równania kwadratowego, np. $x^2-140x+4000=0$.
$\Delta=19600-16000=3600=60^2$
$x_1=\dfrac{140-60}{2}=40$ lub $x_2=\dfrac{140+60}{2}=100$
Obliczamy y:
$y_1=\dfrac{6000}{40}=150$ lub $y_2=\dfrac{6000}{100}=60$.</td><td>$\left(\dfrac{6000}{y}+10\right)\ y+15\ =8250$
Przekształcamy to równanie do równania kwadratowego, np. $y^2-210y+9000=0$.
$\Delta=44100-36000=8100=90^2$
$y_1=\dfrac{210-90}{2}=60$ lub $y_2=\dfrac{210+90}{2}=150$
Obliczamy x:
$x_1=\dfrac{6000}{60}=100$ lub $x_2=\dfrac{6000}{150}=40$.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Odp. Pierwsza działka miała wymiary 40 m na 150 m lub 100 m na 60 m.</td></tr>
</table>

<u>II sposób rozwiązania</u>

Niech x oznacza długość jednego z boków pierwszej działki, a y – długość drugiego boku działki pierwszej, wtedy pole powierzchni działki pierwszej jest równe $x\cdot y$. Stąd mamy równanie $x\cdot y=6000$

Wtedy $x+10$ oznacza długość jednego z boków działki drugiej, a $y+15$ długość drugiego boku działki drugiej, zaś pole powierzchni tej działki jest równe $6000+2250=8250$. Otrzymujemy zatem równanie $x+10\ \cdot\ y+15\ =8250$

Zapisujemy układ równań $\begin{cases} x\cdot y=6000 \\ x+10\ \cdot\ y+15\ =8250 \end{cases}$

Stąd otrzymujemy kolejno $\begin{cases} x\cdot y=6000 \\ x\cdot y+15x+10y+150=8250 \end{cases}$

$$\begin{cases} x\cdot y=6000 \\ 6000+15x+10y+150=8250 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x\cdot y=6000 \\ 15x+10y-2100=0 \end{cases}$$

Równanie $15x+10y-2100=0$ dzielimy obustronnie przez 5.

Otrzymujemy $3x+2y-420=0$, stąd wyznaczamy

<table>
<tr><td>$y=-\frac{3}{2}x+210$</td><td>$x=-\frac{2}{3}y+140$</td></tr>
<tr><td colspan="2">podstawiamy do pierwszego równania i rozwiązujemy</td></tr>
<tr><td>$x\cdot\left(-\frac{3}{2}x+210\right)=6000$
$-\frac{3}{2}x^2+210x-6000=0$
$x^2-140x+4000=0$
$\Delta=19600-16000=3600=60^2$
$x_1=\frac{140-60}{2}=40$ lub $x_2=\frac{140+60}{2}=100$
Obliczamy y:
$y_1=\frac{6000}{40}=150$ lub $y_2=\frac{6000}{100}=60$.</td><td>$\left(-\frac{2}{3}y+140\right)\cdot y=6000$
$-\frac{2}{3}y^2+140y-6000=0$
$y^2-210y+9000=0$
$\Delta=44100-36000=8100=90^2$
$y_1=\frac{210-90}{2}=60$ lub $y_2=\frac{210+90}{2}=150$
Obliczamy x:
$x_1=\frac{6000}{60}=100$ lub $x_2=\frac{6000}{150}=40$.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Odp. Pierwsza działka miała wymiary 40 m na 150 m lub 100 m na 60 m.</td></tr>
</table>

<u>Schemat oceniania I i II sposobu rozwiązania</u>

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania ....1 pkt

Zapisanie jednego z równań: $x\cdot y=6000$ albo $x+10\ \cdot\ y+15\ =8250$, gdzie *x*, *y* oznaczają długości boków pierwszej działki.

<u>Uwaga</u>

Nie wymagamy opisania wprowadzonych oznaczeń, jeżeli z rozwiązania można wywnioskować, że zdający poprawnie je stosuje.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ....2 pkt

Zapisanie układu równań z niewiadomymi *x* i *y* $\begin{cases} x\cdot y=6000 \\ x+10\ \cdot\ y+15\ =8250 \end{cases}$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania ....3 pkt

Zapisanie równania z jedną niewiadomą *x* lub *y*, np:

$x+10\ \left(\frac{6000}{x}+15\right)=8250$ lub $\left(\frac{6000}{y}+10\right)\ y+15\ =8250$ lub $x\cdot\left(-\frac{3}{2}x+210\right)=6000$ lub $\left(-\frac{2}{3}y+140\right)\cdot y=6000$ lub $x^2-140x+4000=0$ lub $y^2-210y+9000=0$.

Uwaga

Zdający nie musi zapisywać układu równań, może bezpośrednio zapisać równanie z jedną niewiadomą i wówczas jego rozwiązanie zostanie zakwalifikowane co najmniej do kategorii *Pokonanie zasadniczych trudności*.

Rozwiązanie zadania do końca lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) ....4 pkt

- rozwiązanie równania z niewiadomą x i nieobliczenie drugiego boku działki,

albo

- rozwiązanie równania z niewiadomą y i nieobliczenie pierwszego boku działki,

albo

- popełnienie błędu rachunkowego w rozwiązaniu równania z jedną niewiadomą (ale otrzymanie dwóch rozwiązań) i konsekwentne do popełnionego błędu obliczenie wymiarów działek,

albo

- obliczenie wymiarów działki tylko w jednym przypadku.

Rozwiązanie pełne ....5 pkt

Obliczenie wymiarów działki pierwszej: działka pierwsza ma wymiary 40 m na 150 m lub 100 m na 60 m.

Uwaga

Jeżeli zdający odgadnie wymiary działki w co najmniej jednym przypadku, to otrzymuje **1 punkt**, nawet w sytuacji, gdy dokonuje systematycznego „przeszukiwania” rozwiązań całkowitych.

Zadanie 33. ***(4 pkt)***

Punkty $A=\ -1,-5\ $, $B=\ 3,-1\ $ i $C=\ 2,4\ $ są kolejnymi wierzchołkami równoległoboku *ABCD*. Oblicz pole tego równoległoboku.

I sposób rozwiązania

Wyznaczamy równanie prostej *AB*: $y=x-4$.

Wyznaczamy równanie prostej *CE* prostopadłej do prostej *AB* i przechodzącej przez punkt *C*: $y=-x+6$

Obliczamy współrzędne punktu *E* (przecięcia prostych *AB* i *CE*) rozwiązując układ równań:

$$\begin{cases} y = x - 4 \\ y = -x + 6 \end{cases}.$$

Rozwiązaniem układu jest: $x = 5$, $y = 1$. Stąd $E = (5, 1)$.

Obliczamy długość odcinka *AB*: $|AB| = \sqrt{4^2 + 4^2} = 4\sqrt{2}$.

Obliczamy długość odcinka *CE*: $|CE| = \sqrt{(5-2)^2 + (1-4)^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$.

Zatem pole równoległoboku jest równe: $P_{ABCD} = |AB| \cdot |CE| = 4\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{2} = 24$.

<u>**Schemat oceniania I sposobu rozwiązania**</u>

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania ....1 pkt

Obliczenie długości odcinka: $|AB| = 4\sqrt{2}$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ....2 pkt

Obliczenie współrzędnych punktu *E*: $E = (5, 1)$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania ....3 pkt

Obliczenie wysokości równoległoboku: $|CE| = 3\sqrt{2}$.

<u>Uwaga</u>

Zdający może obliczyć wysokość równoległoboku wykorzystując wzór na odległość wierzchołka *C* od prostej *AB*.

Rozwiązanie pełne ....4 pkt

Obliczenie pola równoległoboku: $P_{ABCD} = 24$.

<u>**II sposób rozwiązania**</u>

Zauważamy, że pole równoległoboku *ABCD* jest równe podwojonemu polu trójkąta ABC.

Pole trójkąta *ABC* obliczamy ze wzoru: $P_{ABC} = \frac{1}{2}\left|(x_B - x_A)(y_C - y_A) - (y_B - y_A)(x_C - x_A)\right|$.

Obliczamy pole równoległoboku:

$$P_{ABCD} = 2 \cdot P_{ABC} = 2 \cdot \frac{1}{2}\left|(x_B - x_A)(y_C - y_A) - (y_B - y_A)(x_C - x_A)\right| =$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{2}\left|(3-(-1))(4-(-5)) - (-1-(-5))(2-(-1))\right| = |4 \cdot 9 - 4 \cdot 3| = |24| = 24.$$

<u>**Schemat oceniania II sposobu rozwiązania**</u>

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania ....1 pkt

Zauważenie, że $P_{ABCD} = 2 \cdot P_{ABC}$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ....2 pkt

Zastosowanie wzoru na pole trójkąta: $P_{ABC} = \frac{1}{2}\left| (x_B - x_A)(y_C - y_A) - (y_B - y_A)(x_C - x_A) \right|$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania ....3 pkt

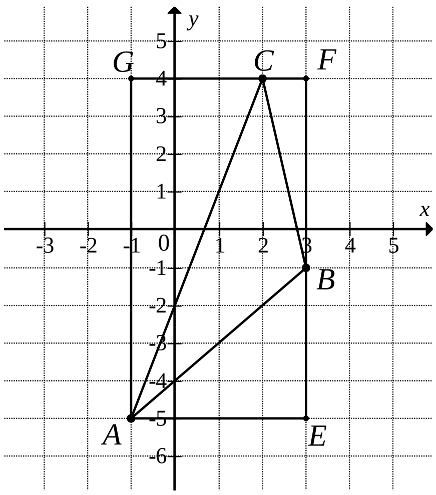
Obliczenie pola trójkąta: 12.

Rozwiązanie pełne ....4 pkt

Obliczenie pola równoległoboku: $P_{ABCD} = 24$.

<u>III sposób rozwiązania</u>

Narysujmy prostokąt *AEFG*, w którym $E = (3, -5)$, $F = (3, 4)$, $G = (-1, 4)$, jak na rysunku.



Wówczas

$$P_{ABC} = P_{AEFG} - P_{AEB} - P_{BFC} - P_{CGA} = 4 \cdot 9 - \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 - \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 1 - \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 9 = 12.$$

Stąd pole równoległoboku *ABCD* jest równe

<u>Schemat oceniania III sposobu rozwiązania</u>

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania ....1 pkt

- narysowanie trójkąta *ABC* i prostokąta *AEFG*

albo

- zauważenie, że $P_{ABCD} = 2 \cdot P_{ABC}$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ....2 pkt

Zapisanie pola trójkąta jako różnicy pola prostokąta *AEFG* i pól trójkątów prostokątnych *AEB, BFC, CGA*: $P_{ABC} = P_{AEFG} - P_{AEB} - P_{BFC} - P_{CGA}$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania ....3 pkt

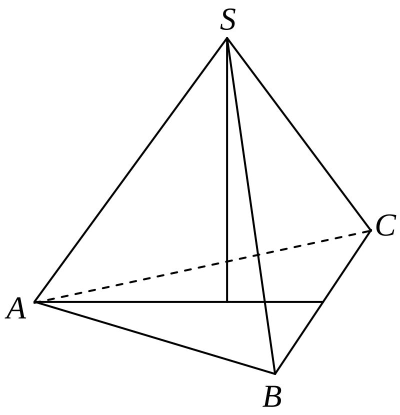
Obliczenie pola trójkąta *ABC:* $P_{ABC} = 12$.

Rozwiązanie pełne ....4 pkt

Obliczenie pola równoległoboku: $P_{ABCD} = 24$.

Zadanie 34. (*4 pkt*)

Objętość ostrosłupa prawidłowego trójkątnego *ABCS* (tak jak na rysunku) jest równa 72, a promień okręgu wpisanego w podstawę *ABC* tego ostrosłupa jest równy 2. Oblicz tangens kąta między wysokością tego ostrosłupa i jego ścianą boczną.



__Rozwiązanie__

Oznaczmy:
a – długość boku trójkąta równobocznego *ABC*, w który wpisano okrąg o promieniu $r = 2$,
H – wysokość tego ostrosłupa,
α – miara kąta między wysokością ostrosłupa i jego ścianą boczną.

Ponieważ $r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$, to $a = 4\sqrt{3}$.

Objętość ostrosłupa prawidłowego trójkątnego *ABCS* jest równa 72, zatem

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{\left(4\sqrt{3}\right)^2 \sqrt{3}}{4} \cdot H = 72 .$$

Obliczamy wysokość ostrosłupa *H*: $\frac{48\sqrt{3}}{12} \cdot H = 72$, stąd $H = \frac{72}{4\sqrt{3}} = 6\sqrt{3}$.

Zauważamy, że $\mathrm{tg}\alpha = \frac{r}{H}$, stąd $\mathrm{tg}\alpha = \frac{2}{6\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{9}$.

__Schemat oceniania__

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania .... 1 pkt

Zaznaczenie kąta α między wysokością ostrosłupa i jego ścianą boczną lub wybór właściwego kąta do dalszych obliczeń.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 pkt

Obliczenie długości boku trójkąta *ABC*: $a = 4\sqrt{3}$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 pkt

Obliczenie wysokości ostrosłupa *ABCS*: $H = 6\sqrt{3}$.

Rozwiązanie pełne .... 4 pkt

Obliczenie tangensa kąta między wysokością ostrosłupa i jego ścianą boczną: $\mathrm{tg}\alpha = \frac{\sqrt{3}}{9}$.