

**EGZAMIN MATURALNY  
W ROKU SZKOLNYM 2013/2014**

**MATEMATYKA  
POZIOM PODSTAWOWY**

**ROZWIĄZANIA ZADAŃ  
I SCHEMAT PUNKTOWANIA**

**SIERPIEŃ 2014**

## Klucz punktowania zadań zamkniętych

Nr zad.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
Odp.	A	A	B	B	C	B	B	D	A	D	C	D	B	D	C	C	C	B	D	C	C	D	D	A	A

## Schemat oceniania zadań otwartych

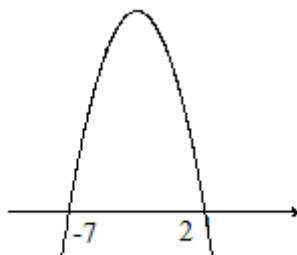
### Zadanie 26. (0–2)

Rozwiąż nierówność  $-x^2 - 5x + 14 < 0$ .

#### Rozwiązanie

Ze wzorów  $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ ,  $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$  na pierwiastki trójmianu kwadratowego otrzymujemy:  $x_1 = 2$ ,  $x_2 = -7$ .

Szkicujemy parabolę, której ramiona skierowane są ku dołowi i zaznaczamy na osi argumentów jej miejsca zerowe.



Odczytujemy zbiór rozwiązań:  $x \in (-\infty, -7) \cup (2, \infty)$ .

#### Schemat oceniania

**Zdający otrzymuje .....1 p.**

gdy:

- prawidłowo obliczy pierwiastki trójmianu kwadratowego  $x_1 = 2$ ,  $x_2 = -7$  i na tym poprzestanie lub dalej popełni błędy

albo

- rozłoży trójmian kwadratowy  $x^2 + 5x - 14$  na czynniki liniowe i zapisze nierówność  $(x+7)(x-2) > 0$  i na tym poprzestanie lub dalej popełni błędy

albo

- popełni błąd rachunkowy przy obliczaniu pierwiastków trójmianu kwadratowego i konsekwentnie do popełnionego błędu rozwiąże nierówność, np.  $x_1 = 7$ ,  $x_2 = 2$ ,  
 $x \in (-\infty, 2) \cup (7, \infty)$

albo

- doprowadzi nierówność do postaci  $\left|x + \frac{5}{2}\right| > \frac{9}{2}$  (na przykład z postaci  $\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{81}{4} > 0$ ) i na tym poprzestanie lub dalej popełni błędy.

**Zdający otrzymuje .....2 p.**

gdy poda odpowiedź w postaci:

- $x \in (-\infty, -7) \cup (2, \infty)$

albo

- $x < -7$  lub  $x > 2$

albo

- $x < -7, x > 2$

albo

- w postaci graficznej z poprawnie zaznaczonymi końcami przedziałów.

### Zadanie 27. (0–2)

Rozwiąż równanie  $x^3 - 6x^2 - 11x + 66 = 0$ .

#### Rozwiązanie I sposób (grupowanie wyrazów)

Stosując metodę grupowania otrzymujemy:

$x^2(x-6) - 11(x-6) = 0$  albo  $x(x^2-11) - 6(x^2-11) = 0$ , stąd  $(x-6)(x^2-11) = 0$ , zatem  $x = 6$  lub  $x = \sqrt{11}$ , lub  $x = -\sqrt{11}$ .

#### Schemat oceniania I sposobu rozwiązania

**Zdający otrzymuje .....1 p.**

gdy doprowadzi lewą stronę równania do postaci iloczynowej, np.:  $(x-6)(x^2-11) = 0$  i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

**Zdający otrzymuje .....2 p.**

gdy poda rozwiązanie  $x = 6$  lub  $x = \sqrt{11}$ , lub  $x = -\sqrt{11}$ .

#### Uwaga

Zdający może od razu zapisać rozkład na czynniki. Jeśli na tym poprzestanie lub błędnie poda rozwiązanie równania to otrzymuje **1 punkt**.

#### Rozwiązanie II sposób (dzielenie)

Sprawdzamy, że  $W(6) = 6^3 - 6 \cdot 6^2 - 11 \cdot 6 + 66 = 0$ , więc jednym z pierwiastków tego wielomianu jest  $x = 6$ .

Dzielimy wielomian przez dwumian  $x-6$  i otrzymujemy  $x^2-11$ . Mamy więc równanie postaci  $(x-6)(x^2-11) = 0$ , a stąd otrzymujemy  $x = 6$  lub  $x = \sqrt{11}$ , lub  $x = -\sqrt{11}$ .

### **Schemat oceniania II sposobu rozwiązania**

**Zdający otrzymuje .....1 p.**

gdy wykona dzielenie wielomianu przez dwumian  $x - 6$ , otrzyma iloraz  $x^2 - 11$  i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

**Zdający otrzymuje .....2 p.**

gdy poda rozwiązanie  $x = 6$  lub  $x = \sqrt{11}$ , lub  $x = -\sqrt{11}$ .

### **Uwaga**

Jeżeli w zapisie rozwiązania występuje jedna usterka, to za takie rozwiązanie zdający może otrzymać co najwyżej **1 punkt**.

### **Zadanie 28. (0–2)**

Wykaż, że suma sześciątów trzech kolejnych liczb naturalnych parzystych jest podzielna przez 24.

### **Rozwiązanie I sposób**

Zapiszmy trzy kolejne liczby naturalne parzyste w postaci  $2n$ ,  $2n + 2$ ,  $2n + 4$ , gdzie  $n$  jest liczbą naturalną.

Wówczas suma sześciątów tych trzech liczb jest równa:

$$\begin{aligned} (2n)^3 + (2n+2)^3 + (2n+4)^3 &= 8n^3 + 8n^3 + 24n^2 + 24n + 8 + 8n^3 + 48n^2 + 96n + 64 = \\ &= 24n^3 + 72n^2 + 120n + 72 = 24(n^3 + 3n^2 + 5n + 3) = 24 \cdot l \end{aligned}$$

Liczba postaci  $24 \cdot l$ , gdzie  $l$  jest liczbą naturalną jest podzielna przez 24.

### **Uwaga**

Zdający może zapisać trzy kolejne liczby naturalne parzyste w innej postaci, np.:  $2n + 2$ ,  $2n + 4$ ,  $2n + 6$ , gdzie  $n$  jest liczbą naturalną.

### **Schemat oceniania I sposobu rozwiązania**

**Zdający otrzymuje ..... 1 p.**

gdy zapisze sumę sześciątów trzech kolejnych liczb naturalnych parzystych w postaci:

$$(2n)^3 + (2n+2)^3 + (2n+4)^3 = 24(n^3 + 3n^2 + 5n + 3).$$

**Zdający otrzymuje ..... 2 p.**

gdy przeprowadzi pełne rozumowanie.

### **Rozwiązanie II sposób**

Zapiszmy trzy kolejne liczby naturalne parzyste w postaci  $2n$ ,  $2n + 2$ ,  $2n + 4$ , gdzie  $n$  jest liczbą naturalną.

Wówczas suma sześciątów tych trzech liczb jest równa:

$$\begin{aligned} (2n)^3 + (2n+2)^3 + (2n+4)^3 &= (2n)^3 + (2(n+1))^3 + (2(n+2))^3 = 8(n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3) = \\ &= 8(3n^3 + 9n^2 + 15n + 9) = 24(n^3 + 3n^2 + 5n + 3). \end{aligned}$$

Liczba postaci  $24 \cdot l$ , gdzie  $l$  jest liczbą naturalną jest podzielna przez 24.

**Schemat oceniania II sposobu rozwiązania**

**Zdający otrzymuje ..... 1 p.**

gdy zapisze sumę sześciątów trzech kolejnych liczb naturalnych parzystych w postaci:

$$(2n)^3 + (2n+2)^3 + (2n+4)^3 = 24(n^3 + 3n^2 + 5n + 3).$$

**Zdający otrzymuje ..... 2 p.**

gdy przeprowadzi pełne rozumowanie.

**Rozwiązanie III sposób**

Zapiszmy trzy kolejne liczby naturalne parzyste w postaci  $n-2$ ,  $n$ ,  $n+2$ , gdzie  $n$  jest parzystą liczbą środkową i  $n \geq 2$ .

Wówczas suma sześciątów tych trzech liczb jest równa:

$$(n-2)^3 + n^3 + (n+2)^3 = n^3 - 6n^2 + 12n - 8 + n^3 + n^3 + 6n^2 + 12n + 8 = 3n^3 + 24n$$

$n$  jest liczbą parzystą, stąd  $n^3$  jest podzielne przez 8.

Zatem liczba  $3n^3$  jest podzielna przez 24.

**Schemat oceniania III sposobu rozwiązania**

**Zdający otrzymuje ..... 1 p.**

gdy zapisze sumę sześciątów trzech kolejnych liczb naturalnych parzystych w postaci:

$$(n-2)^3 + n^3 + (n+2)^3 = 3n^3 + 24n.$$

**Zdający otrzymuje ..... 2 p.**

gdy przeprowadzi pełne rozumowanie.

**Rozwiązanie IV sposób**

Zapiszmy trzy kolejne liczby naturalne parzyste w postaci  $2n-2$ ,  $2n$ ,  $2n+2$ , gdzie  $n$  jest liczbą naturalną.

Wówczas suma sześciątów tych trzech liczb jest równa:

$$\begin{aligned} (2n-2)^3 + (2n)^3 + (2n+2)^3 &= 8[(n-1)^3 + n^3 + (n+1)^3] = \\ &= 8(n^3 - 3n^2 + 3n - 1 + n^3 + n^3 + 3n^2 + 3n + 1) = 8(3n^3 + 6n) = 24(n^3 + 2n). \end{aligned}$$

Liczba postaci  $24 \cdot l$ , gdzie  $l$  jest liczbą naturalną jest podzielna przez 24.

**Schemat oceniania IV sposobu rozwiązania**

**Zdający otrzymuje ..... 1 p.**

gdy zapisze sumę sześciątów trzech kolejnych liczb naturalnych parzystych w postaci:

$$(2n-2)^3 + (2n)^3 + (2n+2)^3 = 24(n^3 + 2n).$$

**Zdający otrzymuje ..... 2 p.**

gdy przeprowadzi pełne rozumowanie.

### Zadanie 29. (0–2)

Kąt  $\alpha$  jest ostry oraz  $\frac{4}{\sin^2 \alpha} + \frac{4}{\cos^2 \alpha} = 25$ . Oblicz wartość wyrażenia  $\sin \alpha \cdot \cos \alpha$ .

#### Rozwiązanie I sposób

Sprowadzamy wyrażenie  $\frac{4}{\sin^2 \alpha} + \frac{4}{\cos^2 \alpha} = 25$  do wspólnego mianownika i otrzymujemy

$\frac{4(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)}{\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha} = 25$ . Korzystając z tożsamości  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ , otrzymujemy

$\frac{4}{\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha} = 25$ , a stąd  $\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = \frac{4}{25}$ , a zatem  $\sin \alpha \cos \alpha = \frac{2}{5}$  (kąt  $\alpha$  jest ostry).

#### Schemat oceniania I sposobu rozwiązania

**Zdający otrzymuje ..... 1 p.**

gdy:

- sprowadzi wyrażenie  $\frac{4}{\sin^2 \alpha} + \frac{4}{\cos^2 \alpha} = 25$  do wspólnego mianownika i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

albo

- doprowadzi wyrażenie do postaci  $4(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) = 25 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha$  i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

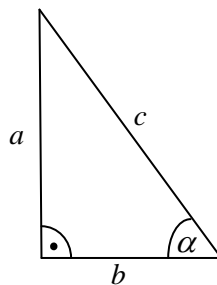
**Zdający otrzymuje ..... 2 p.**

gdy obliczy, że  $\sin \alpha \cos \alpha = \frac{2}{5}$ .

#### Rozwiązanie II sposób

Rysujemy trójkąt prostokątny, w którym oznaczamy długości przyprostokątnych przez  $a$  i  $b$

oraz zaznaczamy kąt ostry  $\alpha$  taki, że  $\sin \alpha = \frac{a}{c}$  lub  $\cos \alpha = \frac{b}{c}$ .



Korzystając z twierdzenia Pitagorasa, wyznaczamy długość przeciwprostokątnej:

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

Ponieważ  $\frac{4}{\sin^2 \alpha} + \frac{4}{\cos^2 \alpha} = 25$ , więc  $\frac{4c^2}{a^2} + \frac{4c^2}{b^2} = 25$ , czyli  $\frac{4c^2(a^2 + b^2)}{a^2b^2} = 25$ . Stąd

$$\frac{4c^2c^2}{a^2b^2} = 25.$$

Ponieważ  $\sin^2 \alpha = \frac{a^2}{c^2}$  i  $\cos^2 \alpha = \frac{b^2}{c^2}$ , to  $\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = \frac{4}{25}$ . Zatem  $\sin \alpha \cos \alpha = \frac{2}{5}$  (kąt  $\alpha$  jest ostry).

### **Schemat oceniania II sposobu rozwiązania**

**Zdający otrzymuje ..... 1 p.**

gdy narysuje trójkąt prostokątny o przyprostokątnych długości  $a$  i  $b$ , zaznaczy w tym trójkącie kąt  $\alpha$  i zapisze:

- $\sin \alpha = \frac{a}{c}$ ,  $\cos \alpha = \frac{b}{c}$  i  $\frac{4c^2c^2}{a^2b^2} = 25$  i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

albo

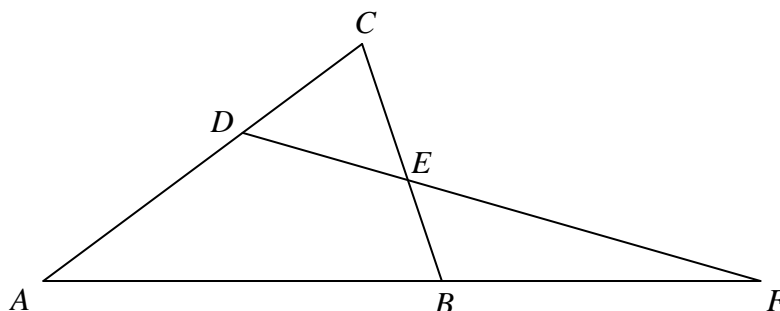
- $\sin \alpha = \frac{a}{c}$ ,  $\cos \alpha = \frac{b}{c}$  i  $4c^2c^2 = 25a^2b^2$  i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

**Zdający otrzymuje ..... 2 p.**

gdy obliczy, że  $\sin \alpha \cos \alpha = \frac{2}{5}$ .

### **Zadanie 30. (0–2)**

Dany jest trójkąt  $ABC$ , w którym  $|AC| > |BC|$ . Na bokach  $AC$  i  $BC$  tego trójkąta obrano odpowiednio takie punkty  $D$  i  $E$ , że zachodzi równość  $|CD| = |CE|$ . Proste  $AB$  i  $DE$  przecinają się w punkcie  $F$  (zobacz rysunek). Wykaż, że  $|\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle ABC| - 2 \cdot |\sphericalangle AFD|$ .



**Rozwiązanie I sposób**

Niech  $|\sphericalangle BAC| = \alpha$ ,  $|\sphericalangle ABC| = \beta$  i  $|\sphericalangle AFD| = \gamma$ .

Ponieważ  $|\sphericalangle ABC| = \beta$ , stąd  $|\sphericalangle FBE| = 180^\circ - \beta$  (z własności kątów przyległych).

$|\sphericalangle BEF| = 180^\circ - (180^\circ - \beta + \gamma) = \beta - \gamma$  (z sumy miar kątów wewnętrznych w trójkącie  $BEF$ ).

Ponieważ  $|\sphericalangle BEF| = \beta - \gamma$ , więc  $|\sphericalangle CED| = \beta - \gamma$  (z własności kątów wierzchołkowych).

W trójkącie  $CDE$ , mamy  $|CD| = |CE|$ , zatem  $|\sphericalangle CDE| = \beta - \gamma$ .

$|\sphericalangle DCE| = |\sphericalangle ACB| = 180^\circ - (\beta - \gamma + \beta - \gamma) = 180^\circ - 2\beta + 2\gamma$  (z sumy miar kątów wewnętrznych w trójkącie  $DCE$ ).

$|\sphericalangle BAC| + |\sphericalangle ABC| + |\sphericalangle ACB| = 180^\circ$ , stąd  $\alpha + \beta + 180^\circ - 2\beta + 2\gamma = 180^\circ$  (z sumy miar kątów wewnętrznych w trójkącie  $DCE$ ). Zatem  $\alpha = \beta - 2\gamma$ .

**Schemat oceniania I sposobu rozwiązania**

**Zdający otrzymuje ..... 1 p.**

gdy zapisze zależności między miarami kątów w trójkątach  $BEF$  i  $CDE$ , np.:  $|\sphericalangle BEF| = \beta - \gamma$   
i  $|\sphericalangle DCE| = 180^\circ - 2\beta + 2\gamma$ .

**Zdający otrzymuje ..... 2 p.**

gdy przeprowadzi pełne rozumowanie np.: zapisze że  $|\sphericalangle DCE| = |\sphericalangle ACB|$   
i  $|\sphericalangle BAC| + |\sphericalangle ABC| + |\sphericalangle ACB| = 180^\circ$ , stąd  $\alpha = \beta - 2\gamma$ .

**Rozwiązanie II sposób**

Niech  $|\sphericalangle BAC| = \alpha$ ,  $|\sphericalangle ABC| = \beta$ ,  $|\sphericalangle AFD| = \gamma$  i  $|\sphericalangle CDE| = \delta$ .

Trójkąt  $CDE$  jest równoramienny, stąd  $|\sphericalangle CDE| = |\sphericalangle CED| = \delta$ .

Ponieważ  $|\sphericalangle CED| = \delta$ , stąd  $|\sphericalangle BEF| = \delta$  (z własności kątów wierzchołkowych).

Zatem  $\beta = \gamma + \delta$  ( $|\sphericalangle ABC| = \beta$  jest kątem zewnętrznym trójkąta  $BEF$ ). Stąd  $\beta - \gamma = \delta$

Ponieważ  $|\sphericalangle CDE| = \delta$ , stąd  $|\sphericalangle ADE| = 180^\circ - \delta$  (z własności kątów przyległych).

Podobnie  $|\sphericalangle CED| = \delta$ , stąd  $|\sphericalangle BED| = 180^\circ - \delta$  (z własności kątów przyległych).

$|\sphericalangle BAC| + |\sphericalangle ABC| + |\sphericalangle BED| + |\sphericalangle ADE| = 360^\circ$  (z sumy miar kątów wewnętrznych w czworokącie  $ABED$ ), stąd  $\alpha + \beta + 180^\circ - \delta + 180^\circ - \delta = 360^\circ$ . Zatem  $\frac{\alpha + \beta}{2} = \delta$ .

Z powyższych rozważań mamy  $\beta - \gamma = \delta$  i  $\frac{\alpha + \beta}{2} = \delta$ , stąd  $\alpha = \beta - 2\gamma$ .



**Schemat oceniania II sposobu rozwiązania**

**Zdający otrzymuje ..... 1 p.**

gdy zapisze zależności między miarami kątów w trójkącie  $CDE$  i czworokącie  $ABED$ , np.:  
 $|\sphericalangle CDE| = |\sphericalangle CED| = \delta$  i  $\alpha + \beta + 180^\circ - \delta + 180^\circ - \delta = 360^\circ$ .

**Zdający otrzymuje ..... 2 p.**

gdy przeprowadzi pełne rozumowanie np.: zapisze że  $\beta - \gamma = \delta$  i  $\frac{\alpha + \beta}{2} = \delta$ , stąd  
 $\alpha = \beta - 2\gamma$ .

**Zadanie 31. (0–2)**

Dany jest ciąg arytmetyczny  $(a_n)$  określony dla  $n \geq 1$ , w którym  $a_5 = 22$  oraz  $a_{10} = 47$ .  
 Oblicz pierwszy wyraz  $a_1$  i różnicę  $r$  tego ciągu.

**Rozwiązanie**

Wykorzystując wzór na  $n$ -ty wyraz ciągu arytmetycznego zapisujemy piąty i dziesiąty wyraz tego ciągu w zależności od wyrazu pierwszego  $a_1$  i różnicy  $r$ :  $a_5 = a_1 + 4r$  i  $a_{10} = a_1 + 9r$ .

Zapisujemy układ równań, np.: 
$$\begin{cases} a_1 + 4r = 22 \\ a_1 + 9r = 47 \end{cases}$$

Obliczamy pierwszy wyraz ciągu  $a_1$  i różnicę  $r$ :  $a_1 = 2$  i  $r = 5$ .

**Schemat oceniania**

**Zdający otrzymuje ..... 1 p.**

gdy zapisze układ równań z niewiadomymi  $a_1$  i  $r$ : 
$$\begin{cases} a_1 + 4r = 22 \\ a_1 + 9r = 47 \end{cases}$$
 i na tym zakończy lub dalej  
 popełni błędy.

**Zdający otrzymuje ..... 2 p.**

gdy obliczy pierwszy wyraz ciągu  $a_1$  i różnicę  $r$ :  $a_1 = 2$  oraz  $r = 5$ .

### Zadanie 32. (0–5)

Miasta A i B są odległe o 450 km. Pani Danuta pokonała tę trasę swym samochodem w czasie o 75 minut dłuższym niż pani Lidia. Wartość średniej prędkości, z jaką jechała pani Danuta na całej trasie była o 18 km/h mniejsza od wartości średniej prędkości, z jaką jechała pani Lidia. Oblicz średnie wartości:

- prędkości, z jaką pani Danuta jechała z A do B.
- prędkości, z jaką pani Lidia jechała z A do B.

#### Rozwiązanie I sposób

Przyjmujemy oznaczenia  $v$  i  $t$  – odpowiednio prędkość w km/h i czas w godzinach dla pani Lidii.

Zapisujemy zależność między drogą, prędkością i czasem dla pani Lidii:  $v \cdot t = 450$ .

Zapisujemy prędkość i czas jazdy dla pani Danuty:  $v - 18$ ,  $t + \frac{5}{4}$ .

Zapisujemy układ równań, np. 
$$\begin{cases} v \cdot t = 450 \\ (v - 18) \cdot \left(t + \frac{5}{4}\right) = 450 \end{cases}$$

Z pierwszego równania wyznaczamy

$t = \frac{450}{v}$	$v = \frac{450}{t}$
podstawiamy do drugiego równania i rozwiązujemy	
$(v - 18) \cdot \left(\frac{450}{v} + \frac{5}{4}\right) = 450$ <p>Przekształcamy to równanie do równania kwadratowego, np. <math>v^2 - 18v - 6480 = 0</math>.</p> $\Delta = 324 + 25920 = 162^2$ $v_1 = \frac{18 - 162}{2} = -72, \text{ sprzeczne z zał.}$ $v > 0$ $v_2 = \frac{18 + 162}{2} = 90 \text{ (km/h)}$ <p>obliczamy prędkość drugiej pani</p> $v - 18 = 72 \text{ (km/h)}$	$\left(\frac{450}{t} - 18\right) \cdot \left(t + \frac{5}{4}\right) = 450$ <p>Przekształcamy to równanie do równania kwadratowego, np. <math>4t^2 + 5t - 125 = 0</math>.</p> $\Delta = 25 + 2000 = 45^2$ $t_1 = \frac{-5 - 45}{8} = -\frac{50}{8}, \text{ sprzeczne z zał. } t > 0$ $t_2 = \frac{-5 + 45}{8} = 5 \text{ (h)}$ <p>obliczamy prędkość pani Lidii</p> $v = \frac{450}{5} = 90 \text{ (km/h)}$ <p>obliczamy prędkość drugiej pani</p> $v - 18 = 72 \text{ (km/h)}$
<p>Odp.: Prędkości, z jakimi jechały panie, są równe: 90 km/h (pani Lidia) i 72 km/h (pani Danuta).</p>	

#### Rozwiązanie II sposób

Przyjmujemy oznaczenia  $v$  i  $t$  – odpowiednio prędkość w km/h i czas w godzinach dla pani Danuty.

Zapisujemy zależność między drogą, prędkością i czasem dla pani Danuty:  $v \cdot t = 450$ .

Zapisujemy prędkość i czas jazdy dla pana Lidii:  $v+18$ ,  $t-\frac{5}{4}$ .

Zapisujemy układ równań, np. 
$$\begin{cases} (v+18) \cdot \left(t - \frac{5}{4}\right) = 450 \\ v \cdot t = 450 \end{cases}$$

Z drugiego równania wyznaczamy

$t = \frac{450}{v}$	$v = \frac{450}{t}$
podstawiamy do pierwszego równania i rozwiązujemy	
$(v+18) \cdot \left(\frac{450}{v} - \frac{5}{4}\right) = 450$ <p>Przekształcamy to równanie do równania kwadratowego, np. <math>v^2 + 18v - 6480 = 0</math>.</p> $\Delta = 324 + 25920 = 162^2$ $v_1 = \frac{-18-162}{2} = -90, \text{ sprzeczne z zał.}$ $v > 0$ $v_2 = \frac{-18+162}{2} = 72 \text{ (km/h)}$ <p>obliczamy prędkość pani Lidii <math>v+18 = 90 \text{ (km/h)}</math></p>	$\left(\frac{450}{t} + 18\right) \cdot \left(t - \frac{5}{4}\right) = 450$ <p>Przekształcamy to równanie do równania kwadratowego, np. <math>4t^2 - 5t - 125 = 0</math>.</p> $\Delta = 25 + 2000 = 45^2$ $t_1 = \frac{5-45}{8} = -5, \text{ sprz. z zał. } t > 0$ $t_2 = \frac{5+45}{8} = 6\frac{1}{4} \text{ (h)}$ <p>obliczamy prędkość pani Danuty <math>v = \frac{450}{6\frac{1}{4}} = 72 \text{ (km/h)}</math></p> <p>obliczamy prędkość pani Lidii <math>v+18 = 90 \text{ (km/h)}</math></p>
Odp.: Prędkości, z jakimi jechały panie, są równe: 90 km/h (pani Lidia) i 72 km/h (pani Danuta).	

### **Schemat oceniania I i II sposobu rozwiązania**

**Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania ..... 1 p.**

- Zapisanie zależności między drogą, prędkością i czasem dla jednej z pań oraz prędkości i czasu dla obu pań przy użyciu tych samych oznaczeń,  
np.: dla pani Lidii  $v \cdot t = 450$ , czas pani Danuty  $t + \frac{5}{4}$ , prędkość pani Danuty  $v-18$ .  
lub: dla pani Danuty  $v \cdot t = 450$ , czas pani Lidii  $t - \frac{5}{4}$ , prędkość pani Lidii  $v+18$ .

### **Uwaga**

Nie wymagamy opisanie oznaczeń literowych, jeżeli z rozwiązania można wywnioskować, że zdający poprawnie je stosuje.

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ..... 2 p.**

- Zapisanie układu równań z niewiadomymi  $v$  i  $t$  – odpowiednio z prędkością i czasem dla

pani Lidii: 
$$\begin{cases} v \cdot t = 450 \\ (v-18) \cdot \left(t + \frac{5}{4}\right) = 450 \end{cases}$$

albo

- Zapisanie układu równań z niewiadomymi  $v$  i  $t$  – odpowiednio z prędkością i czasem dla

pani Danuty: 
$$\begin{cases} (v+18) \cdot \left(t - \frac{5}{4}\right) = 450 \\ v \cdot t = 450 \end{cases}$$

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania ..... 3 p.**

Zapisanie równania z jedną niewiadomą, np:

$$(v-18) \cdot \left(\frac{450}{v} + \frac{5}{4}\right) = 450 \text{ lub } \left(\frac{450}{t} - 18\right) \cdot \left(t + \frac{5}{4}\right) = 450, \text{ lub } (v+18) \cdot \left(\frac{450}{v} - \frac{5}{4}\right) = 450,$$

$$\text{lub } \left(\frac{450}{t} + 18\right) \cdot \left(t - \frac{5}{4}\right) = 450.$$

**Uwaga**

Zdający nie musi zapisywać układu równań, może bezpośrednio zapisać równanie z jedną niewiadomą.

**Rozwiązanie zadania do końca lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) ..... 4 p.**

- rozwiązanie równania z niewiadomą  $v$  z błędem rachunkowym i konsekwentne obliczenie drugiej prędkości

albo

- rozwiązanie równania z niewiadomą  $t$  bezbłędnie i nieobliczenie prędkości obu pań

albo

- obliczenie  $t$  z błędem rachunkowym i konsekwentne obliczenie prędkości obu pań.

**Rozwiązanie pełne ..... 5 p.**

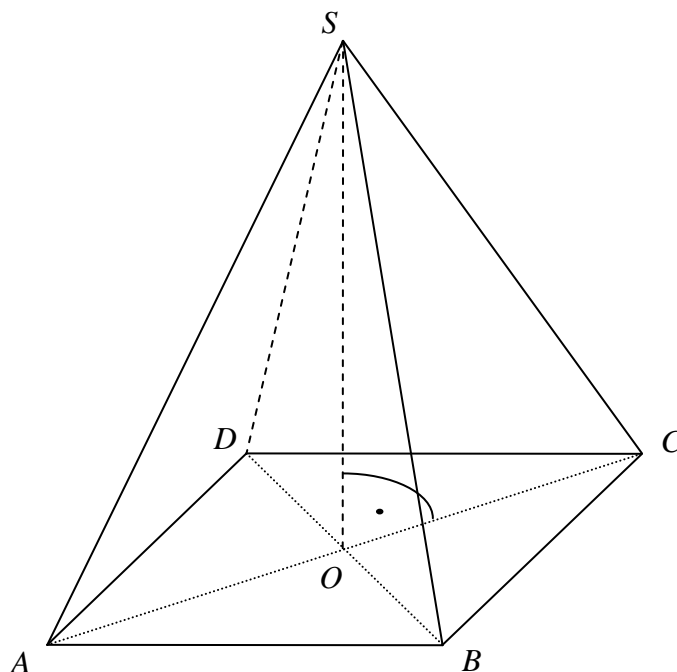
Obliczenie prędkości obu pań: 90 km/h i 72 km/h.

**Uwagi**

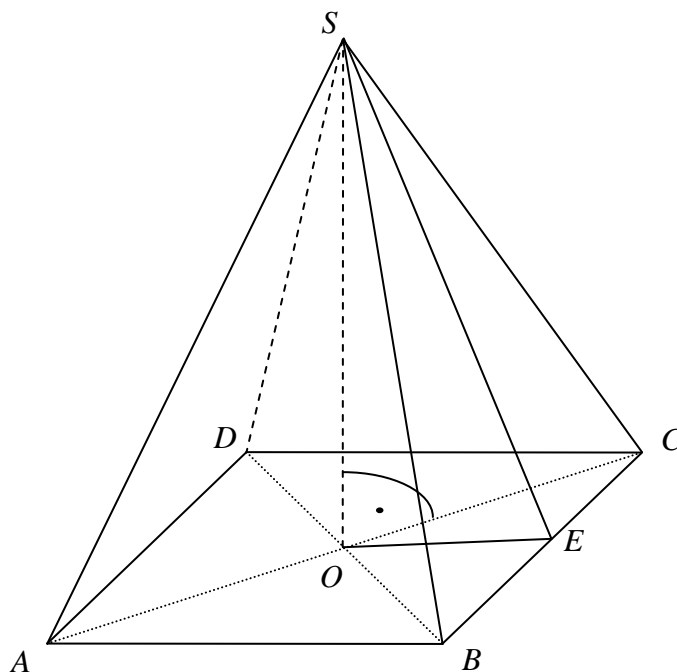
1. Jeżeli zdający podaje (bez obliczeń) jedną prędkość: 90 km/h lub 72 km/h, to otrzymuje **0 pkt.**
2. Jeżeli zdający podaje (bez obliczeń) prędkości obu pań: 90 km/h i 72 km/h, to otrzymuje **1 pkt.**
3. Jeżeli zdający pokonał zasadnicze trudności zadania, ale w trakcie ich pokonywania zostały popełnione błędy rachunkowe lub usterki, to może otrzymać **2 pkt** za całe rozwiązanie.

### Zadanie 33. (0–4)

Podstawą ostrosłupa prawidłowego jest kwadrat. Wysokość ściany bocznej tego ostrosłupa jest równa 22, a tangens kąta nachylenia ściany bocznej ostrosłupa do płaszczyzny jego podstawy jest równy  $\frac{4\sqrt{6}}{5}$ . Oblicz objętość tego ostrosłupa.



### Rozwiązanie



Niech  $|ES| = h = 22$ ,  $|AB| = a$ ,  $|OE| = \frac{a}{2}$ ,  $|SO| = H$ .

Podany tangens kąta to stosunek  $\frac{|SO|}{|OE|}$ . Zatem  $\frac{H}{\frac{a}{2}} = \frac{4\sqrt{6}}{5}$ .

Trójkąt  $SOE$  jest prostokątny. Zatem  $H^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = 484$ .

Rozwiążemy układ równań  $\left\{ \begin{array}{l} \frac{H}{\frac{a}{2}} = \frac{4\sqrt{6}}{5} \\ H^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = 484 \end{array} \right.$ .

- 1) Obliczamy z pierwszego równania  $H$ :  $5H = 2\sqrt{6}a$ , czyli  $H = \frac{2\sqrt{6}}{5}a$ .
- 2) Podstawiamy wyznaczoną wartość do równania stopnia drugiego i otrzymujemy równanie:  $\frac{121}{100}a^2 = 484$ .
- 3) Obliczamy  $a$  (długość krawędzi podstawy):  $a = 20$ .
- 4) Obliczamy  $H$  (wysokość ostrosłupa):  $H = 8\sqrt{6}$ .
- 5) Obliczamy objętość ostrosłupa:  $V = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot H = \frac{1}{3} \cdot 20^2 \cdot 8\sqrt{6}$ .

Objętość ostrosłupa jest równa:  $V = \frac{3200}{3}\sqrt{6}$ .

### Schemat oceniania

**Rozwiązanie, w którym postępowanie jest niewielkie, ale konieczne na drodze do pełnego rozwiązania zadania ..... 1 p.**

Zapisanie zależności pomiędzy długością krawędzi podstawy ostrosłupa a wysokością ostrosłupa, wynikającej z podanej wartości tangensa kąta nachylenia ściany bocznej do

płaszczyzny podstawy:  $\frac{H}{\frac{a}{2}} = \frac{4\sqrt{6}}{5}$ .

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ..... 2 p.**

Zapisanie dwóch zależności pomiędzy długością krawędzi podstawy ostrosłupa a wysokością ostrosłupa, pozwalających na wyznaczenie obu tych wielkości:

np. zapisanie układu równań  $\left\{ \begin{array}{l} \frac{H}{a} = \frac{4\sqrt{6}}{5} \\ \frac{H}{2} \\ H^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = 484 \end{array} \right. .$

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania ..... 3 p.**

Obliczenie długości krawędzi podstawy i wysokości ostrosłupa:  $a = 20$  i  $H = 8\sqrt{6}$  .

**Rozwiązanie pełne ..... 4 p.**

Obliczenie objętości ostrosłupa:  $V = \frac{3200}{3}\sqrt{6}$  .

### Zadanie 34. (0–4)

Zbiór  $M$  tworzą wszystkie liczby naturalne dwucyfrowe, w zapisie których występują dwie różne cyfry spośród: 1, 2, 3, 4, 5. Ze zbioru  $M$  losujemy jedną liczbę, przy czym każda liczba z tego zbioru może być wylosowana z tym samym prawdopodobieństwem. Oblicz prawdopodobieństwo, że wylosujemy liczbę większą od 20, w której cyfra dziesiątek jest mniejsza od cyfry jedności.

#### I sposób rozwiązania (model klasyczny)

Zdarzeniami elementarnymi są liczby ze zbioru  $M$ . Możemy je utożsamiać z ciągami  $(a, b)$ , których wyrazami są liczby ze zbioru  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ . Mamy do czynienia z modelem klasycznym.

Liczba wszystkich zdarzeń elementarnych jest równa  $|\Omega| = 5 \cdot 4 = 20$ .

Niech  $A$  oznacza zdarzenie, że wylosowana liczba jest większa niż 20 i jej cyfra dziesiątek jest mniejsza od cyfry jedności. Zdarzeniu temu sprzyjają zdarzenia elementarne  $(a, b)$  takie, że  $a \in \{2, 3, 4, 5\}$  oraz  $a < b$ . Zatem liczba zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu  $A$  jest równa  $|A| = 3 + 2 + 1 = 6$ .

Łatwo możemy też zapisać wszystkie zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniu  $A$ , czyli

$$A = \{(2, 3), (2, 4), (2, 5), \\ (3, 4), (3, 5), \\ (4, 5)\}$$

Prawdopodobieństwo zdarzenia  $A$  jest zatem równe

$$P(A) = \frac{6}{20} = \frac{3}{10} .$$

#### Schemat oceniania I sposobu rozwiązania

**Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania ..... 1 pkt**

Zdający

- obliczy liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych:  $|\Omega| = 20$

albo

- opíše zdarzenie sprzyjające np. w postaci  $(a, b)$ , gdzie  $a \in \{2, 3, 4, 5\}$  oraz  $a < b$ .

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .....2 pkt**  
Zdający

- opíše zdarzenie sprzyjające np. w postaci  $(a, b)$ , gdzie  $a \in \{2, 3, 4, 5\}$  oraz  $a < b$   
i obliczy ich liczbę:  $|A| = 6$

albo

- obliczy liczbę wszystkich możliwych zdarzeń elementarnych:  $|\Omega| = 20$  i opíše zdarzenie sprzyjające np. w postaci  $(a, b)$ , gdzie  $a \in \{2, 3, 4, 5\}$  oraz  $a < b$

albo

- zapisze wszystkie zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniu:  $(2, 3)$ ,  $(2, 4)$ ,  $(2, 5)$ ,  $(3, 4)$ ,  $(3, 5)$ ,  $(4, 5)$ .

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania .....3 pkt**

Zdający obliczy liczbę wszystkich możliwych zdarzeń elementarnych:  $|\Omega| = 20$  oraz opíše zdarzenia sprzyjające zdarzeniu  $A$ , np. w postaci  $(a, b)$  takie, że  $a \in \{2, 3, 4, 5\}$ , gdzie  $a < b$  oraz obliczy ich liczbę:  $|A| = 6$ .

**Rozwiązanie pełne .....4 pkt**

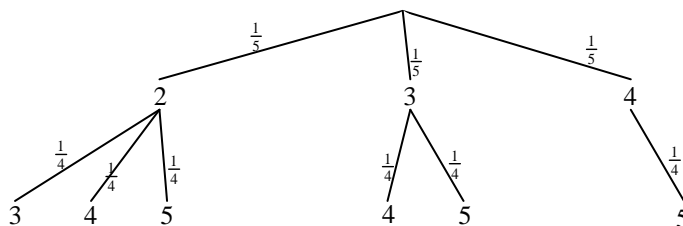
Zdający obliczy prawdopodobieństwo zdarzenia  $A$ :  $P(A) = \frac{3}{10}$ .

### Uwagi

1. Jeśli zdający rozwiąże zadanie do końca i otrzyma  $P(A) > 1$ , to otrzymuje za całe rozwiązanie **0 punktów**.
2. Jeżeli zdający wypisując zdarzenia sprzyjające opuści przez nieuwagę jedno z nich, ale z zapisu wynika, że rozumie istotę doświadczenia i konsekwentnie obliczy prawdopodobieństwo, to za całe rozwiązanie otrzymuje **3 punkty**.
3. Jeżeli zdający wypisze wszystkie zdarzenia sprzyjające, ale popełni błąd przy ich zliczaniu to za całe rozwiązanie otrzymuje **3 punkty**.

### II sposób rozwiązania (metoda drzewa)

Niech  $A$  oznacza zdarzenie, że wylosowana liczba jest większa niż 20 i jej cyfra dziesiątek jest mniejsza od cyfry jedności. Sporządźmy drzewko ilustrujące nasze doświadczenie losowe. Drzewko ograniczymy tylko do jego istotnych gałęzi. Prawdopodobieństwo na kolejnych odcinkach tego drzewa jest równe odpowiednio  $\frac{1}{5}$  oraz  $\frac{1}{4}$ . Zaznaczmy te gałęzie drzewka, które odpowiadają zajściu zdarzenia  $A$ .





Korzystając ze sporządzonego drzewa obliczamy prawdopodobieństwo zdarzenia  $A$

$$P(A) = 6 \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{10}.$$

### **Schemat oceniania II sposobu rozwiązania**

**Rozwiązanie, w którym postępowanie jest niewielkie, ale konieczne na drodze do pełnego rozwiązania .....1 pkt**

Zdający narysuje drzewo ilustrujące „losowanie” kolejno dwóch różnych cyfr ze zbioru  $M$  i przynajmniej na jednym odcinku gałęzi zapisze prawdopodobieństwo.

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .....2 pkt**

Zdający

- narysuje drzewo z istotnymi gałęziami i przynajmniej na jednej gałęzi zapisze prawdopodobieństwa na wszystkich odcinkach drzewa

albo

- narysuje drzewo z wybranymi istotnymi gałęziami, z którego będzie wynikało, że rozumie istotę doświadczenia i przynajmniej na jednej gałęzi zapisze prawdopodobieństwa na wszystkich odcinkach drzewa.

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania .....3 pkt**

Zdający

- narysuje drzewo z istotnymi gałęziami, przynajmniej na jednej gałęzi zapisze prawdopodobieństwa na wszystkich odcinkach drzewa i zaznaczy zdarzenia sprzyjające

albo

- narysuje drzewo z wybranymi istotnymi gałęziami, z którego będzie wynikało, że rozumie istotę doświadczenia i przynajmniej na jednej gałęzi zapisze prawdopodobieństwa na wszystkich odcinkach drzewa i zaznaczy zdarzenia sprzyjające.

**Rozwiązanie pełne .....4 pkt**

Zdający obliczy prawdopodobieństwo zdarzenia  $A$ :  $P(A) = \frac{3}{10}$ .

### **Uwagi**

1. Jeśli zdający rozwiąże zadanie do końca i otrzyma  $P(A) > 1$ , to otrzymuje za całe rozwiązanie **0 punktów**.
2. Jeżeli zdający opuści przez nieuwagę jedną gałąź (z rysunku będzie wynikało, że rozumie istotę doświadczenia) i konsekwentnie obliczy prawdopodobieństwo, to za całe rozwiązanie otrzymuje **3 punkty**.
3. Jeżeli zdający narysuje wszystkie istotne gałęzie, ale popełni błąd przy ich zliczaniu i konsekwentnie obliczy prawdopodobieństwo to za całe rozwiązanie otrzymuje **3 punkty**.